



ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 11 от « 17 » 06 20 19 г.  
Зав. кафедрой  /Юмагулов М.Г.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета математики и  
информационных технологий  
 /Ефимов А.М.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Дифференциальные уравнения  
(наименование дисциплины)

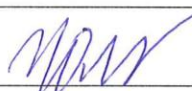

Обязательная часть

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)  
09.03.03 Прикладная информатика

Направленность (профиль) подготовки  
Информационные и вычислительные технологии

Квалификация  
бакалавр

Разработчик (составитель) зав. каф., д.ф.-м.н., профессор	<u></u> / Юмагулов М.Г.
доцент, к.ф.-м.н.	<u></u> / Гайдамак О.Г.

Для приема: 2019

Уфа 2019 г

### **Список документов и материалов**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
  4. 1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
  4. 2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
  5. 1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
  5. 2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационное обеспечение дисциплины
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс освоения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знания	ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	
Умения	ОПК-1.2.Умеет использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	
Владения (навыки / опыт деятельности)	ОПК-1.3.Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части.

Дисциплина изучается на 2 курсе в 3-4 семестрах

Цель изучения дисциплины: основные понятия теории дифференциальных уравнений, основные типы дифференциальных уравнений и методы их интегрирования, применять общие методы к решению конкретных задач в математике и физике.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: аналитическая геометрия, математический анализ, алгебра. Освоение дисциплины «Дифференциальные уравнения» необходимо при последующем изучении дисциплин «Уравнения в частных производных», «Теория вероятностей» и ряда других.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

#### 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

##### 4. 1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код и формулировка компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Этап (уровень ) освоения компете нции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Не зачтено»	«Зачтено»		
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно »)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
Первый этап (уровень)	ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Фрагментарные представления о базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук естественнонаучного содержания	Неполные представления о базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук естественнонаучного содержания	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о базовых знаниях, полученных в области математических и (или) естественных наук естественнонаучного содержания утверждений	Сформированные систематические представления о базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук
Второй этап (уровень)	ОПК-1.2.Умеет использовать их в профессиональной деятельности	Фрагментарные умение использовать их в профессиональной деятельности	В целом успешное, но не систематическое умение использовать их в профессиональной деятельности	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение использовать их в профессиональной деятельности	Сформированное умение использовать их в профессиональной деятельности

Третий этап (уровень)	ОПК-1.3.Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Фрагментарное владение навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	В целом успешное, но не систематическое применение навыков выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Успешное и систематическое применение навыков выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний
-----------------------	--	---	--	--	---

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена*: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; *для зачета*: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

*для экзамена*:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

*для зачета*:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

**4. 2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	ОПК-1.1.Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	ОПК-1 .Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Контрольная работа, ргр, коллоквиум, зачет, экзамен
2-й этап Умения	ОПК-1.2.Умеет использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Контрольная работа, ргр, коллоквиум, зачет, экзамен
3-й этап Владеть навыками	ОПК-1.3.Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	ОПК-1.Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Контрольная работа, ргр, коллоквиум, зачет, экзамен

## Рейтинг-план дисциплины

Рейтинг–план дисциплины представлен в приложении 2.

### Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета: 2 теоретических вопроса. Первый вопрос за 1 семестр, второй вопрос за 2 семестр.

Вопросы для экзамена:

1. Понятие дифференциального уравнения и его решения. Интегральные кривые. Понятие общего решения дифференциального уравнения.
2. Задача Коши. Теорема (Пеано) существования решения задачи Коши. Теорема (Пикара) существования и единственности решения задачи Коши.
3. Дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения вида  $x' = f(x, t)$ . Уравнения в полных дифференциалах вида  $P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$ . Линейные уравнения первого порядка вида  $x' = a(t)x + b(t)$ .
4. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка вида  $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$ . Фундаментальная система решений однородного линейного уравнения.
5. Общее решение однородного и неоднородного линейного уравнения  $n$ -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
6. Схема решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами  $x'' + ax' + bx = f(t)$ .
7. Функции от матриц и их вычисление. Экспонента матрицы  $e^{At}$ .
8. Линейные системы дифференциальных уравнений  $x' = A(t)x + f(t)$ . Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы  $x' = A(t)x$ .
9. Формула Коши общего решения однородной  $x' = Ax$  и неоднородной системы  $x' = Ax + f(t)$  дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
10. Формулы общего решения линейной однородной системы второго порядка  $x' = Ax$  (в терминах собственных значений и собственных векторов матрицы  $A$ ).
11. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Разрешимость краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
12. Задача об изгибе стержня.
13. Автономные уравнения и системы. Свойства автономных систем. Траектории автономных систем и их отличие от интегральных кривых.
14. Точки равновесия (особые точки) и периодические решения (циклы) автономных систем.
15. Фазовые пространства и фазовые портреты автономных систем. Фазовое поле скоростей.
16. Фазовые портреты автономных уравнений первого порядка.
17. Фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка  $x' = Ax$ . Классификация особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр.
18. Фазовые портреты нелинейных автономных систем второго порядка в окрестности особой точки. Линеаризованное уравнение.
19. Фазовый портрет математического маятника.
20. Понятие устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Асимптотическая устойчивость. Свойства устойчивости нулевого решения линейного уравнения  $x' = qx$  при  $q < 0$ ,  $q > 0$  и  $q = 0$ .

21. Признаки устойчивости нулевой точки равновесия линейных автономных систем  $x' = Ax$ .
22. Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем  $x' = f(x)$ .
23. Устойчивость точек равновесия математического маятника.
24. Устойчивые матрицы и многочлены. Теорема Стодола. Критерий Рауса-Гурвица.
25. Основы численных методов решения задачи Коши. Метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.
26. Понятие динамической системы. Примеры динамических систем: модель Мальтуса, модель Ферхюльста, модель «хищник-жертва», математический маятник, модель Лоренца. Точки равновесия этих систем и свойства устойчивости.

Образец экзаменационного билета:

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Экзаменационный билет №1  
по курсу «Дифференциальные уравнения»**

1. Понятие дифференциального уравнения и его решения. Интегральные кривые. Понятие общего решения дифференциального уравнения.
2. Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем  $x' = f(x)$ .
- 3.

Преподаватель Юмагулов М. Г. / \_\_\_\_\_ /

Зав. кафедрой Юмагулов М. Г. / \_\_\_\_\_ /

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

**Критерии оценки (в баллах):**

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками



материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### **Примерные темы практических занятий**

#### **Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной**

- 1) Понятие дифференциального уравнения. Метод изоклин
- 2) Уравнения с разделяющимися переменными;
- 3) Геометрические и физические задачи
- 4) Однородные уравнения;
- 5) Уравнения в полных дифференциалах; интегрирующий множитель;
- 6) Линейное уравнение; уравнение Бернулли;

#### **Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной :**

- 7) Метод введения параметра;
- 8) Уравнения Лагранжа и Клеро;
- 9) Теорема существования и единственности решения задачи Коши; особые решения.

#### **Дифференциальные уравнения высших порядков :**

- 10) Уравнения, допускающие понижение порядка;
- 11) Линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
- 12) Линейные уравнения с переменными коэффициентами
- 13) Краевые задачи; функции Грина;

#### **Системы обыкновенных дифференциальных уравнений :**

- 14) Линейные системы с постоянными коэффициентами;
- 15) Общее решение линейной неоднородной системы уравнений;

#### **Устойчивость :**

- 16) Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости; функции Ляпунова; достаточные условия асимптотической устойчивости; устойчивость по первому приближению;
- 17) Особые точки: седло, узел, фокус, центр;
- 18) Фазовая плоскость

### **Расчетно-графические работы (РГР).**

#### **Описание РГР**

В каждом семестре студенту представляется две расчетно-графические работы (РГР). РГР №1 состоит из 12 заданий. РГР №2 состоит из 9 заданий.. При выполнении РГР студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Работа должна выполняться на листах формата А4; первой страницей является титульный лист, на котором указывается фамилия и имя студента, группа, номер варианта.
2. Решение задач следует приводить в порядке номеров, указанных в РГР. Перед решением каждой задачи необходимо полностью переписать ее условие.
3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на сведения из теории с указанием необходимых формул и теорем.
4. Решение задач геометрического содержания (фазовые портреты и т.п.) должно сопровождаться соответствующими рисунками.
5. Номера вариантов студент выбирает в соответствии с номером своей фамилии в списке группы

## РГР №1

1. Проверить(подстановкой), является ли функция  $x = \frac{t^2 + t \ln(2t)}{t+1}$  решением данного дифференциального уравнения  $t(t+1)(x' - 1) = x$ . Если да, то указать область существования решения.
2. Методом изоклин приближенно начертить интегральные кривые уравнения  $y' = xy$   
Найти общее решение
3. Для дифференциального уравнения  $x = \sqrt{|x-1|} \ln t + \ln x$ :- определить область существования решения задачи Коши(определяемую условиями теоремы Пиано); определить область существования решения задачи Коши(определяемую условиями теоремы Пикара);
4. Составить дифференциальное уравнение кривых, обладающих тем свойством, что отрезок касательной заключенной между осями координат имеет длину  $a$ .
5. За какое время вытекает половины воды из цилиндрического бака с диаметром основания 1 м и высотой 1 м через отверстие диаметром 2 см в дне? Ось цилиндра вертикальна, в начальный момент бак наполнен водой. Принять что вода из отверстия вытекает со скоростью, равной  $3h$  метр/сек, где  $h$  высота уровня воды над отверстием.
6. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения  $(xy' - y) \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) = x$
7. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения  $(x^2 - y^2 - 4x)dx - 2xydy = 0$
8. Решить задачу Коши  $x' + x = e^t, x(0) = 2$
9. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y = 2xy' - (y')^2$
10. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения  $x'' + x' = 2tx'$
11. .Выяснить, образуют ли данные функции  $\sin x, \cos x, \cos(x+1)$  линейно независимую систему
12. Показать, что функции  $t+2, t^2-1$  образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения второго порядка  $(t^2 + 4t + 1)x'' - 2(t+2)x' + 2x = 0$

### Критерий оценивания РГР №1

*Зачтено, если правильно решено не менее 8 заданий,  
Незачтено, если решено менее 8 заданий.*

### Критерий оценивания РГР №1

*36 баллов выставляется студенту, если 12 задач решены верно;  
33 балла выставляется студенту, если 11 задач решены верно;  
30 баллов выставляется студенту, если 10 задач решены верно.  
27 балла выставляется студенту, если 9 задач решены верно  
24 баллов выставляется студенту, если 8 задач решены верно;  
21 балла выставляется студенту, если 7 задач решены верно;  
18 баллов выставляется студенту, если 6 задач решены верно.  
15 балла выставляется студенту, если 5 задач решены верно  
12 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;  
9 балла выставляется студенту, если 3 задачи решены верно  
6 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;  
3 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно;*

## РГР №2

1. Найти решение задачи Коши  $y'' + 2y' + y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 2$ .
2. Выяснить, имеет ли решение краевая задача  $y'' + 2y' + y = 1, y(0) = 0, y'(1) + y(1) = 0$
3. Вычислить матричную экспоненту  $e^{At}$  и построить решение задачи Коши  $x' = Ax_0, x(0) = x_0, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
4. Найти точки равновесия скалярных уравнений первого порядка  $x' = x^3 - 2x^2 - x + 2, 1 + \sin 2x = x'$ , построить их фазовые портреты в фазовом пространстве и в расширенном фазовом пространстве.
5. Изобразить фазовые портреты линейных систем  $x' = A_k x, A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
6. Применяя критерий Раусса-Гурвица выяснить, при каких значениях параметра  $a$  нулевое решение уравнения  $y^{(4)} + ay^{(3)} + 14y'' + 36y' + 45y = 0$  является асимптотически устойчивым
7. Найти точки равновесия системы  $x' = f(x)$ , выяснить характер их устойчивости, изобразить схематично фазовый портрет системы в окрестностях этих точек, привести соответствующие линеаризованные уравнения. 
$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1 \\ x_2' = 2 - \sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$
8. Рассмотрим систему  $\begin{cases} x' = (y - f(x)) \\ y' = x - y - z \\ z' = -y \end{cases}$  где  $f(x) = \frac{x^3 - x}{6}$ , Найти точки равновесия системы, определить их характер устойчивости, привести соответствующие линеаризованные уравнения.
9. Перейти от дифференциального уравнения второго порядка  $y'' - \frac{(1-y^2)y'}{2} + y = 0$  к автономной системе  $x' = F(x)$   $x \in R^2$  на основе замены  $x_1 = y; x_2 = y'$ . Найти точки равновесия полученной системы, определить их тип, выяснить характер ее устойчивости. Построить на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  траекторию решения  $x(t)$  полученной системы на промежутке  $0 \leq t \leq 20$ , соответствующей решению задачи Коши для дифференциального уравнения.

### Критерий оценивания РГР №2

*Зачтено, если правильно решено не менее 8 заданий,*

*Незачтено, если решено менее 8 заданий.*

#### Критерий оценивания РГР №2

*16 баллов выставляется студенту, если 9 задач решены верно;*

*14 баллов выставляется студенту, если 8 задач решены верно;*

*12 баллов выставляется студенту, если 7 задач решены верно.*

*10 Баллов выставляется студенту, если 6 задач решены верно*

*8 баллов выставляется студенту, если 5 задач решены верно;*

*6 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;*

*4 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно.*

*2 балла выставляется студенту, если 2 задачи решены верно*

*1 балл выставляется студенту, если 1 задача решена верно;*

### Контрольные работы

Описание контрольной работы:

В каждом семестре студенту представляется две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из 4-5 объемных заданий. Задача считается правильно решенной, если студентом приведено подробное и полное ее решение. Каждое задание контрольных работ №1,2 оценивается в 5 баллов. Каждое задание контрольных работ №3,4 оценивается в 4 балла.

#### Контрольная работа № 1

1. Решить уравнение  $2(x\sqrt{y} + 1)udx = xdy$ ,
2. Решить уравнение  $(2xy^2 - 3y^3)dx + (y^3 - 3xy^2)dy = 0$
3. Решить уравнение  $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$
4. Решить уравнение  $xy' = e^y + 2y'$

#### Критерии оценки (в баллах)

*20 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;  
15 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;  
10 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно.  
5 баллов выставляется студенту, если 1 задача решена верно*

#### Контрольная работа № 2

1. Решить уравнение:  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ .
2. Решить уравнение:  $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$ .
3. Решить уравнение  $xyu'' - x(y')^2 + y'(y'+y)$ .
4. Решить уравнение  $x((y')^2 + e^2) = -2y'$ .

#### Критерии оценки (в баллах)

*20 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;  
15 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;  
10 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно.  
5 баллов выставляется студенту, если 1 задача решена верно*

#### Контрольная работа № 3

1. Решить уравнение  $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ ,
2. Решить уравнение  $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$ ,
3. Решить уравнение  $y'' - 5y' = 2x - 3$ ,
4. Решить уравнение  $x^2y'' - 6xy' + 6y = x$ ,
5. Решить уравнение  $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0$ .

#### Критерии оценки (в баллах)

*20 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;*

16 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;  
 12 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;  
 8 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно.  
 4 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно.

### Контрольная работа № 4

1. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y + 7e^{-3t} \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений  $\begin{cases} x' = x + z - y, \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

3. Исследовать на устойчивость:  $\begin{cases} x' = 1 + \ln(1 + 2x) - e^y \\ y' = 2x + tg(y) \end{cases}$

4. Исследовать особые точки уравнения  $y' = \frac{-6x-5y}{x+3y}$

### Критерии оценки (в баллах)

16 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;  
 12 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;  
 8 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно.  
 4 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно

### Коллоквиум

#### Описание коллоквиума

Коллоквиум проводится в каждом семестре. Студенту предоставляется возможность ответить на один теоретический вопрос из списка вопросов к коллоквиуму.

#### Вопросы для коллоквиума №1

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Примеры.
2. Понятие дифференциального уравнения. Решение д. у. Основные виды д. у. : уравнение n-го порядка, уравнение первого порядка, уравнение относительно дифференциалов.
3. Геометрическая интерпретация решений д. у. : интегральные кривые, поле направлений, изоклины, метод изоклин приближенного построения интегральных кривых.
4. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решение задачи Коши.
5. Теорема (Пеано) существования решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка и примеры, пример неединственности.
6. Теорема (Пикара) существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка и примеры.
7. Понятие общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка. Частное решение. Примеры.
8. Дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Уравнения с разделяющимися переменными.
9. Однородные уравнения.
10. Уравнения в полных дифференциалах.

11. Линейные уравнения первого порядка. Общее решение линейного однородного уравнения.
12. Общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка. Метод Бернулли (вариации произвольных постоянных).
13. Уравнение Бернулли и схема его решения. Уравнение Риккати.
14. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной: :
  - 1) метод введения параметра;
  - 2) уравнения Лагранжа и Клеро;
  - 3) теорема существования и единственности решения задачи Коши;
  - 4) особые решения.

**Критерии оценки (в баллах):**

*18- 24баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.*

*- 11-17баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий ответ, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.*

*- 1-10балла выставляется студенту в случае, если студент дал неполный ответ на заданный вопрос и не ответил на один дополнительный вопрос.*

*- 0 баллов выставляется студенту, если студент не ответил на заданный вопрос и не ответил на дополнительные вопросы .*

Вопросы для коллоквиума №2

1. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка (ЛДУ) вида  $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$ . Фундаментальная система (ФСР) решений однородного ЛДУ.
2. Теоремы о структуре общего решения однородного и неоднородного ЛДУ. Метод вариации произвольных постоянных.
3. ЛДУ с постоянными коэффициентами. ФСР и построение общего решения однородного ЛДУ на примере уравнения второго порядка  $x'' + ax' + bx = 0$ . Построение частного решения неоднородного ЛДУ.
4. Линейные системы дифференциальных уравнений  $x' = A(t)x + f(t)$ . Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы  $x' = A(t)x$ .
5. Формула Коши общего решения однородной  $x' = Ax$  и неоднородной системы  $x' = Ax + f(t)$  дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
6. Формулы общего решения линейной однородной системы второго порядка  $x' = Ax$  (в терминах собственных значений и собственных векторов матрицы  $A$ ).
7. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Разрешимость краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
8. Задача об изгибе стержня.
9. Автономные уравнения и системы. Свойства автономных систем. Траектории автономных систем и их отличие от интегральных кривых.
10. Точки равновесия (особые точки) и периодические решения (циклы) автономных систем.
11. Фазовые пространства и фазовые портреты автономных систем. Фазовое поле скоростей.
12. Фазовые портреты автономных уравнений первого порядка.
13. Фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка  $x' = Ax$ . Классификация особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр.
14. Фазовые портреты нелинейных автономных систем второго порядка в окрестности особой точки. Линеаризованное уравнение.

15. Фазовый портрет математического маятника.
16. **Понятие устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Асимптотическая устойчивость.** Свойства устойчивости нулевого решения линейного уравнения  $x' = qx$  при  $q < 0$ ,  $q > 0$  и  $q = 0$ .
17. **Признаки устойчивости нулевой точки равновесия линейных автономных систем  $x' = Ax$ .**
18. **Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем  $x' = f(x)$ .**
19. Устойчивость точек равновесия математического маятника.
20. Устойчивые матрицы и многочлены. **Теорема Стодола. Критерий Рауса-Гурвица.**
21. Сетки и сеточные функции. Интерполирование функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
22. Основы численных методов решения задачи Коши. Приближенное сеточное решение. Ошибка дискретизации.
23. **Метод Эйлера** и метод Рунге-Кутты. Одношаговые и многошаговые методы.
24. **Устойчивость линейных периодических систем  $x' = A(t)x$ . Матрица монодромии. Мультипликаторы.**

#### **Критерии оценки (в баллах):**

*11- 16 баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.*

*-4-10 баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий ответ, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.*

*- 1-4 балла выставляется студенту в случае, если студент дал неполный ответ на заданный вопрос и не ответил на один дополнительный вопрос.*

*- 0 баллов выставляется студенту, если студент не ответил на заданный вопрос и не ответил на дополнительные вопросы.*

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература**

1. Юмагулов М. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения. М. - Ижевск: Изд-во РХД, 2008. ISBN 978-5-93972-652-8. Доступ к тексту возможен через Электронную библиотечную систему (ЭБС) БашГУ, URL : <https://bashedu.bibliotech.ru>
2. Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем. – СПб. : Издательство «Лань», 2015. – 272 с. ISBN 978-5-8114-1799-5. Доступ к тексту возможен через Электронную библиотечную систему (ЭБС) БашГУ, URL : <https://bashedu.bibliotech.ru> Доступен также через Электронно-библиотечную систему издательства "Лань", URL: <http://e.lanbook.com/>.
3. Альсевич, Л. А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : практикум / Альсевич Л. А. — Минск : "Вышшая школа", 2012 . — 384 с. — Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему «Университетская библиотека online» .— ISBN 978-985-06-2111- 978-985-06-2111- 978-985-06-2111- 978-985-06-2111-5 .— <URL: <http://www.biblioclub.ru/book/135999/>>.

4. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю. Н. Бибиков. — Электрон.дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 304 с. —Доступен черезЭлектронно-библиотечную систему издательства "Лань", Режим доступа: <http://e.lanbook.com/>.

5. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. ; Ижевск: Изд-во РХД, 1998 (35 экз)

**Дополнительная литература:**

1. Егоров, А. И. Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А. И. Егоров. - Москва :Физматлит, 2013. - 108 с. : ил. - Библиогр. : с. 105. - ISBN 978-5-9221-1489-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275303>
2. Рыбаков, К. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Практический курс : учебное пособие / К. А. Рыбаков, А. С. Якимова, А. В. Пантелеев. - Москва : Логос, 2010. - 384 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-465-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84753>

**5. 2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013г. Лицензии бессрочные.

2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензиибессрочные.

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	<a href="https://elib.bashedu.ru/">https://elib.bashedu.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	<a href="http://www.biblioclub.ru/">http://www.biblioclub.ru/</a>
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	<a href="http://e.lanbook.com/">http://e.lanbook.com/</a>





**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<p><b>Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы</b></p>	<p><b>Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы</b></p>	<p>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</p>
<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитории № 523, 515 (физмат корпус - учебное).  <b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитории № 511, 527, 522 (физмат корпус - учебное).  <b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитории № 515, 523, 527, 522(физмат корпус - учебное).  <b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитории № 515, 523, 527, 522(физмат корпус - учебное).  <b>5. помещения для самостоятельной работы:</b> аудитория № 426 (физмат корпус - учебное), читальный зал №2 (физмат корпус - учебное)</p>	<p align="center"><b>Аудитория №511</b>  Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа проектор Mitsubishi EX 320U 3D 2.4кг., экран на штативе DraperDiplomat (1:1) 84/84* 213*213 MW, компьютер в составе: системный блок DEPO 460MD/3-540/T500G/DVD-RW, монитор 20".</p> <p align="center"><b>Аудитория № 515</b>  Учебная мебель, доска настенная меловая.</p> <p align="center"><b>Аудитория № 523</b>  Учебная мебель, доска настенная меловая.</p> <p align="center"><b>Аудитория № 527</b>  Учебная мебель, доска настенная меловая.</p> <p align="center"><b>Аудитория №522</b>  Учебная мебель, доска, персональный компьютер LenovoThinkCentre A70z IntelPentium E 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер LessarLS/LU-H24KB2.</p> <p align="center"><b>Читальный зал №2</b>  Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p> <p align="center"><b>Аудитория № 426</b>  Учебная мебель, доска, персональные компьютеры системный блок /Core i5-7400 (3.0) / 8Gb/HDD1Tb/ 450W/Win 10 Pro/ Клавиатура USB. Мышь USB/ LCD Монитор 21,5” – 14 шт</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.  2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.</p>

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Дифференциальные уравнения  
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	8/288
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
лекций	68
практических/ семинарских	68
лабораторных	
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	1, 9
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	106,3
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	43, 8

Формы контроля:

Экзамен 4 семестр

зачет 3 семестр

РГР 3 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т. п.)
		ЛК	ПР/ СЕМ	ПР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	<p><b>Вводные понятия.</b> Понятие дифференциального уравнения и его решения. Геометрическая интерпретация решений: интегральные кривые, поле направлений, изоклины. Система дифференциальных уравнений.</p> <p>Задача Коши. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных. Особые решения.</p>	2	2		10, 3	<b>1, 4, 5, доп. 4, 7</b>	решение задач [5] №1-6, № 15, №16 (а, б), № 17-20, №30, № 33, №36, № 36, № 37-45;	Контрольная работа, РГР, коллоквиум, зачет, экзамен
2.	<p><b>Дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Элементарные приемы интегрирования.</b> Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, линейное уравнение первого порядка, уравнения Бернулли и Риккати. Уравнения Лагранжа и Клеро. Уравнения, допускающие понижение порядка.</p>	16	16		12	<b>1, 4, 5, доп. 4, 7</b>	решение задач [5] №425, №426, №427, №428, №429, №455, №456, №457, №458, №463, №464, №465, № 466, № 477, №481, №482, № 483, №241, №242, №243, №244, №245, №246, №251, №252, №253,	Контрольная работа, РГР, коллоквиум, зачет, экзамен

							№254, №255, №267, №268, №287,	
3.	<b>Линейные дифференциальные уравнения.</b> Линейные уравнения n-го порядка; однородные и неоднородные уравнения. Задача Коши. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Определитель Вронского. Теоремы о структуре общего решения линейного однородного и неоднородного уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.  Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго	12	12		12	<b>1, 4, 5, доп. 4, 7</b>	Решение задач №501, №502 №511, №512, №513, №514, №515, №516, №549, №550, №551, №552, № 575, №576, №577, №578, № 582, № 583, № 584.	Контрольная работа, РГР, коллоквиум, экзамен
4.	<b>Системы линейных дифференциальных уравнений.</b> Функции от матриц; матричная экспонента. Линейные однородные и неоднородные системы дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы. Формулы общего решения линейной системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.	10	12		12	<b>1, 4, 5, доп. 4, 7</b>	Решение задач: [5] №786, №787, №788, №789, №789, №790, №802, №803, №826, №828, № 829, №830, №846, №847, №848, №849	Контрольная работа, РГР, коллоквиум, экзамен
5.	<b>Автономные уравнения и системы.</b> Фазовые пространства и фазовые траектории автономных систем. Фазовое поле скоростей. Точки равновесия (особые точки) и периодические решения. Фазовые портреты. Фазовые портреты автономных уравнений первого порядка и линейных автономных систем второго порядка;	10	8		12	<b>1, 2, 3, 5, доп. 1-3</b>	№965, №967, №969, №971, №973, №979, №982, №984, №986, №988, №990[5]	Контрольная работа, РГР, коллоквиум, экзамен

	классификация особых точек: узел, седло, фокус, центр.							
6	<b>Устойчивость.</b> Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость решений дифференциальных уравнений. Достаточные условия устойчивости точек равновесия автономных систем; устойчивость по первому приближению. Критерий Рауса-Гурвица. Понятие функции Ляпунова.	18	18		12	<b>1, 2, 3, 5, доп. 1-3</b>	Решение задач; №882, №883, №884, №885, №890, №891, №894, №899, №900, №907, №908, №914, №915, №916, №925, №926, №932, №933, №934, №935	Контрольная работа, РГР, коллоквиум, экзамен
7	<b>Динамические системы.</b> Понятие динамической системы. Примеры: модели Мальтуса, Ферхюльста, Лотки-Вольтерра, Ван-дер-Поля, Лоренца. Аттракторы динамических систем.	2				<b>1, 2, 3, 5, доп. 1-3</b>	Упражнения 1. 2-1. 1. 6 главы 1 [2]	коллоквиум, экзамен,
	<b>Всего часов:</b>	68	68		70, 3			

Рейтинг-план дисциплины

Дифференциальные уравнения

Направление подготовки 01.03.01 Математика  
курс 2, семестр 3

Рейтинг-план №1 (зачет)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. Дифференциальные уравнения первого порядка</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
РГР №1	3	12	0	36
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Письменная контрольная работа №1	5	4	0	20
<b>Модуль 2. Дифференциальные уравнения неразрешенные относительно производных. Дифференциальные уравнения высших порядков</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
Коллоквиум №1	24	1	0	24
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Письменная контрольная работа №2	5	4	0	20
<b>Поощрительные баллы</b>				
Студенческая олимпиада или конкурс рефератов, публикация статей, решение задач повышенной сложности			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Зачет				

## Рейтинг-план дисциплины

### Дифференциальные уравнения

Направление подготовки 01.03.01 Математика  
курс 2, семестр 4

#### Рейтинг-план №2 (экзамен)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. Линейные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. РГР №2	2	9	0	18
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Письменная контрольная работа №3	4	5	0	20
<b>Модуль 2. Устойчивость. Фазовые портреты</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
Коллоквиум №2	16	1	0	16
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Письменная контрольная работа №4	4	4	0	16
<b>Поощрительные баллы</b>				
Студенческая олимпиада или конкурс рефератов, публикация статей, решение задач повышенной сложности			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Зачет				
2. Экзамен			0	<b>30</b>