МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:
на заседании кафедры
протокол № 7 от «17» июня 2019г.
Зав. кафедрой __________/ Ишкин Х.К.

Согласовано:
Председатель УМК факультета математики и информационных технологий
____________________/ Ефимов А.М.____

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

дисциплина Дополнительные главы функционального анализа

Обязательная часть

программа магистратуры

Направление подготовки (специальность)

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Квалификация
магистр

Разработчики (составители) профессор, д.ф.-м.н., профессор	________________/ Гайсин А.М.

Для приема: 2019

Уфа 2019 г.

Составитель: профессор кафедры математического анализа, д.ф.м.-н. Гайсин А.М.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа протокол №7 от 17 июня 2019 года

Список документов и материалов

1.	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы
2.	Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3.	Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4.	Фонд оценочных средств по дисциплине
	4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
	4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций
5.	Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
	5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
	5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины
6.	Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине
7.	*Приложение 1:* Содержание рабочей программы

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций[1] (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1 «способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики»	ОПК-1.1. фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем математики.	Знать фундаментальную основу курса Дополнительные главы функционального анализа», формулировки и решения основных задач
		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать основные понятия и факты курса «Дополнительные главы функционального анализа» в профессиональной деятельности.
		ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем математики.	Владеть навыками решения актуальных и значимых проблем по дисциплине «Дополнительные главы функционального анализа»

2. **Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Дополнительные главы функционального анализа» относится к *обязательной* части.

Дисциплина изучается на 2 *курсе* в 4 семест*ре.*

Цели изучения дисциплины:

- анализ и обобщение результатов научно-исследовательских работ в области функционального анализа

- углубить и расширить знания, полученные в ходе изучения курса «Функционального анализа», для дальнейшего их применения в научно-исследовательской работе

3. **Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)**

Объем дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа» составляет 6 ЗЕТ, или 216 академических часов.

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4. **Фонд оценочных средств по дисциплине**

4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции: ОПК-1 «способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики»

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем математики.	Знать фундаментальную основу курса «Дополнительные главы функционального анализа», формулировки и решения основных задач	Фрагментарные представления об основных положениях дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	Неполные представления об основных положениях дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных положениях дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	Сформированные систематические представления об основных положениях дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»

ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать основные понятия и факты курса в профессиональной деятельности.	Фрагментарные представления об основных методах дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	В целом успешное, но не систематическое использование основных методов дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	В целом успешное, но содержащие отдельные пробелы использование основных методов дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	Сформированное умение использовать основные методы дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»
ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем математики.	Владеть навыками решения актуальных и значимых проблем по дисциплине «Дополнительные главы функционального анализа»	Фрагментарные представления об основных методах дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	В целом успешное, но не систематическое применение навыков применения основных методов дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	В целом успешное, но содержащие отдельные пробелы применение навыков использования основных методов дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»	Полностью сформированные навыки решения актуальных и значимых проблем по дисциплине «Дополнительные главы функционального анализа»

Шкала оценивания:

5 баллов выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

4 балла выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

3 балла выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

2 балла выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	Оценочные средства
ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем математики. ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности. ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем математики.	Знать фундаментальную основу курса «Дополнительные главы функционального анализа», формулировки и решения основных задач	устные тестовые опросы на занятиях, экзамен, РГР
	Уметь использовать основные понятия и факты курса в профессиональной деятельности.	решение задач (работа у доски), экзамен
	Владеть навыками решения актуальных и значимых проблем по дисциплине «Дополнительные главы функционального анализа»	устные тестовые опросы на занятиях, решение задач экзамен

Экзаменационные вопросы:

1.Евклидовы пространства.
2. Определение. Примеры ортогональных базисов.
3.Теорема об ортогонализации.
4. Ряды Фурье по заданной ортонормированной системе.
5. Задача о наилучшем приближении.
6. Полные и замкнутые системы.
7. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
8. Полные евклидовы пространства.
9. Теорема Рисса-Фишера.
10.Критерий полноты ортонормированной системы.
11. Определение и свойства пространства $L_1(X,\mu)$. Полнота.
12. Всюду плотные множества в $L_1(X,\mu)$.
13. Сепарабельность. Определение и основные свойства пространства $L_2(X,\mu)$.
14. Полнота, сеперабельность.
15. Сходимость в среднем квадратичном, в среднем, равномерная сходимость, сходимость по мере, почти всюду. Связь между ними.
16. Примеры для случаев $\mu(X)<\infty$, $\mu(X)=\infty$.
17. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.
18. Условия равномерной сходимости ряда Фурье.
19. Теорема Фейера.
20. Полнота тригонометрической системы.
21. Теорема Вейерштрасса

Образец экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Направление подготовки 01.04.01 - Математика
Экзаменационный билет №1
по курсу «Дополнительные главы функционального анализа»

1. Евклидовы пространства.
2. Сходимость в среднем квадратичном, в среднем, равномерная сходимость, сходимость по мере, почти всюду. Связь между ними

Зав. кафедрой ___________________/ Ишкин Х.К.

Критерии оценки

Критерии оценки (в баллах):

- ***5 баллов (отлично)*** *выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.*

- ***4 (хорошо)*** *выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.*
- ***3 (удовл)*** *баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.*
- ***2 (неудовлетворительно)*** *выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить на серию дополнительных вопросов.*

Список тем на семинары

1. Тригонометрическая система в $L_2[-\pi;\pi]$.
2. Классический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов.
3. Сходимость в $L_2[-\pi;\pi]$ ряда Фурье.
4. Тригонометрические системы в $L_2[0;\pi]$.
5. Ряд Фурье в комплексной форме.
6. Многочлены Лежандра.
7. Многочлены, ортогональные относительно данного веса.
8. Многочлены Чебышева.
9. Ортогональный базис в пространствах $L_2[-\infty;+\infty]$ и $L_1[0;+\infty]$.
10. Многочлены Эрмита и Лагерра.
11. Системы Хаара.

Система оценивания:

За доклады выставляются текущие оценки, которые потом преподаватель учитывает при допуске к экзамену, на самом экзамене, при защите РГР.

- ***5 баллов (отлично)*** *выставляется студенту, если студент представил полный, развернутый доклад по своей теме. Показал владение теоретическим материалом, а также знание тонких моментов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.*
- ***4 (хорошо)*** *выставляется студенту, если студент раскрыл в основном тему своего доклада, однако допущены неточности в определении основных понятий, а также были незначительные недочеты в понимании представленного материала*
- ***3 (удовл)*** *баллов выставляется студенту, если в докладе были допущены существенные ошибки, студент не смог ответить на некоторые вопросы по теме, тема раскрыта непоностью.*
- ***2 (неудовлетворительно)*** *выставляется студенту, если студент не подготовился к докладу и не смог раскрыть тему, ответить на вопросы*

В семестре студенты выполняют 2 контрольные работы

Варианты контрольной работы

Контрольная работа №1

1. Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением:
   a) Евклидовое ; b) Нормированное; c) гильбертово.
2. Неравенство $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \| f \|^2$ называется *неравенством*:
   a) Парсеваля; b) Бесселя; c) Фурье: d) Коши-Буняковского.

3. Изоморфны между собой:
a) любые два сепарабельных гильбертовых пространства;
b) любые два евклидовых пространства бесконечного числа измерений;
c) любые два евклидовых пространства конечного числа измерений.
4. Полное нормированное пространство называется…
5. Пространство называется сепарабельным, если…

Контрольная работа №2

1. Норма в L_2 определяется формулой:
   a) $\|f\| = \sqrt{\int f^2(x)\, d\mu}$; b) $\|f\| = \int |f(x)|\, d\mu$.

2. Сходимость функциональной последовательности в смысле метрики пространства L_1 называется:
   a) Сходимостью в среднем квадратичном;
   b) Сходимостью в среднем.

3. При каком условии в пространстве $L_1(X, \mu)$ существует счетное всюду плотное множество функций?
4. В пространстве $L_2(X, \mu)$ скалярное произведение определено формулой:

5. Выберите верные утверждения при условии, что $\mu(X) < \infty$:
   a) Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_2(X, \mu)$ сходится в метрике $L_2(X, \mu)$, то она сходится и в метрике $L_1(X, \mu)$;
   b) Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_1(X, \mu)$ сходится в метрике $L_1(X, \mu)$, то она сходится и в метрике $L_2(X, \mu)$;
   c) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем квадратичном, то она сходится равномерно;
   d) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то она сходится и в среднем квадратичном.

Описание методики оценивания:
Критерии оценки (в баллах):
За контрольную работу студент получает текущие оценки, которые потом преподаватель учитывает при допуске к экзамену, на самом экзамене, при защите РГР.
- 5 баллов выставляется студенту, все задачи решены верно;
- 4 балла выставляется студенту, если верно решены больше 80% но меньше 100% задач;
- 3 баллов выставляется студенту, если правильно решены больше 50%, но меньше 80% задач
- 2 (неудовлетворительно) в остальных случаях

Задания для расчетно-графической работы

В ходе решения РГР студент должен ответить на все теоретические вопросы каждого блока заданий, а также решить по 2 задачи по каждой из тем.

14. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение линейного оператора.
2. Дать определения непрерывного и ограниченного оператора. Как связаны понятия непрерывности и ограниченности для линейного оператора?
3. Привести различные определения нормы линейного непрерывного оператора.

ЗАДАЧИ

1. Найти общий вид линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Показать, что он ограничен.
2. Проверить линейность, ограниченность, непрерывность следующих операторов. Найти их нормы, если они линейны и ограничены.

a) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\xi)\, d\xi\,, \quad A : C[0,1] \to C[0,1]\,;$

b) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\, ds\,, \quad A : C[0,1] \to C[2,4]\,;$

c) $A_\lambda : L^2(0,1) \to L^2(0,1)\,; \quad (A_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \leqslant \lambda; \\ 0, & \text{если } t > \lambda; \end{cases}$

d) $(Ax)(t) = x'(t)\,, \quad A : C^{(1)}[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi]\,;$

e) $(Ax)(t) = x'(t)\,, \quad A : C^{(1)}[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi]\,,$

$\|x\|_{C^{(1)}} = \|x\|_C\,;$

f) $Ax = (\xi_3, \xi_4, \ldots)\,, \quad A : \ell^3 \to \ell^3\,;$

g) $Ax = (\xi_1 + 3, \xi_2, \xi_3, \ldots)\,, \quad A : \ell^\infty \to \ell^\infty\,;$

h) $(Ax)(t) = \int\limits_8^t s^2 x^2(s)\, ds\,, \quad A : C[8,10] \to C[8,10]\,.$

3. Пусть $A : \ell^2 \to \ell^2$, $Ax = (\alpha_1\xi_1\,, \alpha_2\xi_2\,, \ldots)$, где $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная числовая последовательность. Установить критерий непрерывности оператора A. Найти норму A.

4. Для каких $a(t)$ оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ непрерывен в $C[0,1]$? В $L^2(0,1)$? Найти нормы.

5. Для каких α, β оператор $(Ax)(t) = t^{\beta} \cdot x(t^{\alpha})$ ограничен в $L^2(0,1)$? Найти $\|A\|$.

6. Доказать, что если $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор, то он остается непрерывным при замене нормы в X и Y на эквивалентные.

7. Пусть L — замкнутое подпространство гильбертова пространства H. Доказать линейность, непрерывность и найти норму оператора $P : H \to L$, который каждому элементу $x \in H$ сопоставляет его проекцию на L (P называется проектором на L).

15. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение обратного оператора.

2. Сформулировать теоремы (достаточные условия) существования операторов A^{-1}, $(I+A)^{-1}$, $(A+\Delta A)^{-1}$.

3. Сформулировать теорему Банаха об обратном операторе.

ЗАДАЧИ

1. Пусть оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ определяется равенством:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Доказать ограниченность оператора A, оценить $\|A\|$, найти A^{-1}.

2. При каких α_1, $\alpha_2, \ldots$ существует обратный оператор к оператору $Ax = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \ldots)$, $A : \ell^2 \to \ell^2$? Когда A^{-1} непрерывен?

3. Проверить, что оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dt} : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ имеет правый обратный, но не имеет левого обратного.

4. Найти обратный оператор к оператору $\dfrac{d}{dt} : X \to C[0,1]$, где $X = \{ x \in C^{(1)}[0,1] \ : \ x(0) = 0 \}$.

5. Пусть $X = \{ x \in C^{(2)}[0,1] \ : \ x(0) = x(1) = 0 \}$. Найти обратный к оператору $\dfrac{d^2}{dt^2} + \lambda \ : \ X \to C[0,1]$, если он существует. Для каких λ существует обратный оператор?

6. При каких λ существует обратный оператор к оператору

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\xi)\,d\xi + \lambda \cdot x(t)\,, \qquad A : C[0,1] \to C[0,1]\,?$$

Построить A^{-1}.

7. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : \ell^2 \to \ell^2$, если

a) $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$;

b) $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, \ldots)$;

c) $Ax = (\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3, 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, \ldots)$;

d) $Ax = (\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \ldots)$.

8. Пусть $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$, $(Bx)(t) = x(t^2)$ — операторы в $C[0,1]$. Чему равны $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$?

9. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X,X)$. Доказать, что

a) если существуют A^{-1}, B^{-1}, то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

b) если существуют A^{-1}, $(BA)^{-1}$, то существует B^{-1}.

Указание. $B^{-1} = A(BA)^{-1}$.

10. Пусть X — банахово пространство с нормами $\|\,.\,\|_1$ и $\|\,.\,\|_2$. Если $\exists\ C_1 > 0$ такое, что $C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ для $\forall\ x \in X$, то $\exists\ C_2 < \infty$ такое, что $\|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$, $\forall\ x \in X$. Доказать.

11. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X,X)$, причем существует $(I - AB)^{-1}$. Доказать, что существует $(I - BA)^{-1}$.

Указание. $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

17. ТЕОРЕМА ХАНА-БАНАХА. СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулировать теорему Хана-Банаха и следствия из нее.
2. Дать определения сильной и слабой сходимости последовательности функционалов, определение слабой сходимости последовательности элементов.
3. Сформулировать критерий слабой сходимости последовательности функционалов и элементов.

ЗАДАЧИ

1. Найти все линейные непрерывные продолжения функционала

$$f(x) = 4\xi_1 , \qquad x = \xi_1 \in \mathbb{R}^1$$

на пространство $\mathbb{R}^3$ с сохранением нормы, если $\mathbb{R}^3$ рассматривается с нормой

a) $\|x\| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$;

b) $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|$;

c) $\|x\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|, |\xi_3|)$.

2. Найти все линейные непрерывные продолжения функционала

$$f(x) = \xi_1 + \xi_2 , \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad \|x\| = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p}$$

на пространство ℓ^p с сохранением нормы, если

a) $p = 1$;

b) $1 < p < \infty$.

3. Доказать, что последовательность функционалов

$$F_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{int}\, dt$$

слабо сходится в $L^2(-\pi, \pi)$, но сильной сходимости нет.

4. Покажите, что существует последовательность конечных линейных комбинаций функционалов $F_t(x) = x(t)$, сходящаяся слабо к функционалу $F(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$ (функционалы определены в пространстве $C[0,1]$). Имеется ли последовательность, сходящаяся по норме?

5. Пусть

$$F_n(x) = n \cdot \left[x\left(\frac{1}{n}\right) + x\left(-\frac{1}{n}\right) - 2x(0) \right], \qquad F(x) \equiv 0.$$

Показать, что последовательность $\{F_n\}$

a) сходится по норме к F в $C^{(2)}[-1,1]$;

b) сходится слабо к F в $C^{(1)}[-1,1]$, но не сходится сильно;

c) не сходится даже слабо в $C[-1,1]$.

<u>*Указания.*</u>

(i) *Использовать формулу Тейлора.*

(ii) *Оценить нормы* $\|F_n\|$ *снизу:*

$$x_n'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > \dfrac{1}{n}, \\ nt, & \text{если } |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ -1, & \text{если } t < -\dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

(iii) *Показать, что последовательность* $\{\|F_n\|\}$ *неограничена.*

6. Пусть

$$F_n(x) = n^2 \cdot \left[x\left(\frac{1}{n}\right) + x\left(-\frac{1}{n}\right) - 2x(0) \right], \qquad F(x) = x''(0).$$

Показать, что последовательность $\{F_n\}$

a) сходится к F по норме в $C^{(3)}[-1,1]$;

b) сходится слабо к F в $C^{(2)}[-1,1]$, но не сходится сильно;

c) не сходится даже слабо в $C^{(1)}[-1,1]$.

7. Доказать, что слабая сходимость в ℓ^2 сильнее покоординатной сходимости.

8. Какие из последовательностей сходятся сильно, слабо в ℓ^2 ?

   a) $x_n = \left(1,\ \dfrac{1}{2}, \dots,\ \dfrac{1}{n}, 0, \dots\right);$

   b) $x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots);$

   c) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, 1,\ \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots\right);$

   d) $x_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n},\ \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+2}, \dots\right);$

   e) $x_n = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n},\ \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \dots\right);$

   f) $x_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \dots\right).$

9. Исследовать на сильную и слабую сходимости следующие последовательности в $L^2(0,1)$:

   a) $x_n(t) = t^n;$

   b) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } t \in \left[0,\ \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{если } t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right); \end{cases}$

   c) $x_n(t) = e^{i\sqrt{n}t};$

   d) $x_n(t) = \sin(t \ln n);$

   e) $x_n(t) = \cos(n^2 t);$

   f) $x_n(t) = \sin(e^n t);$

   g) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} \cdot (1 - nt), & \text{если } t \in \left[0,\ \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{если } t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]; \end{cases}$

h) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

i) $x_n(t) = \begin{cases} 2n(1-nt), & \text{если } t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{если } t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$

10. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset H$ слабо сходится к x. Доказать, что $\{x_n\}$ будет сходиться сильно при выполнении одного из условий:

a) $\|x_n\| \to \|x\|$;

b) $\|x_n\| \leqslant \|x\| \quad \forall\ n > N_0$;

c) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$.

18. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определения сопряженного оператора к линейному непрерывному оператору в нормированном и гильбертовом пространствах.
2. Какая связь между сопряженным оператором в H и сопряженным оператором в нормированном пространстве, когда в качестве нормированного пространства рассматривается H?
3. Перечислить свойства сопряженного оператора.

ЗАДАЧИ

1. Найти сопряженный оператор к оператору $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяемому равенством

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

2. Найти сопряженный оператор к проектору $P : H \to L$, где L — замкнутое подпространство в H.
3. Найти сопряженный оператор к оператору $A : X \to X$, если

a) $X = \ell^2, \quad Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$;

b) $X=\ell^2$, $Ax=(\alpha_j\xi_j\,,\,\alpha_{j+1}\xi_{j+1}\,,\,\ldots)$;

c) $X=\ell^1$, $Ax=(\xi_1,\ldots,\xi_n\,,0,0,\ldots)$;

d) $X=\ell^p$, $Ax=(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},\xi_1,0,0,\ldots)$, $1\leqslant p<\infty$;

e) $X=\ell^p$, $Ax=(\xi_2,\xi_1,\xi_4,\xi_3,\ldots)$;

f) $X=L^2(0,1)$, $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(\xi)\,d\xi$;

g) $X=L^2(0,1)$, $(Ax)(t)=x(t^\alpha)$;

h) $X=L^2(0,1)$, $(A_\lambda x)(t)=\begin{cases} x(t), & \text{если} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \lambda<t\leqslant 1,\end{cases}$

где $\lambda\in(0,1)$ — фиксированное число;

i) $X=H$, $Ax=(x,y)\cdot z$, где $y,\,z\in H$ — фиксированы;

j) $X=L^2(0,1)$, $(Ax)(t)=\int\limits_0^1 t\,x(s)\,ds$.

4. Пусть оператор $\Phi:\mathcal{L}(X,Y)\to\mathcal{L}(Y^*,X^*)$ определяется равенством $\Phi(A)=A^*$, где X, Y — нормированные пространства. Доказать, что Φ непрерывен.
5. Доказать, что если $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ и $A^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$, то существует $(A^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*,Y^*)$, причём $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.
6. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, Y — нормированное, $A\in\mathcal{L}(X,Y)$. Доказать, что $(A^*)^*=A$, как оператор из X в Y.

Критерии оценки РГР:

1. - оценка «зачтено» выставляется студенту, если нет замечаний или если имеются несущественные замечания;
2. -оценка «не зачтено» выставляется в остальных случаях.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. МГУ им. М.В. Ломоносова М.: Физматлит, 2009. https://e.lanbook.com/book/2206

Дополнительная литература

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. Издательство: Лань, 2009. https://e.lanbook.com/book/245
2. Семина Г.М., Данченков И.В.. Ряды Фурье. Преобразования Фурье. Практикум. Изд.:МИСИС, 2018

3. Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2002 http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613.
4. Лебедев В.И..Функциональный анализ и вычислительная математика: учебное пособие. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2005 http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68363.
5. Волков В. А.. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона: Учебное посо бие. Изд-во Уральского университета, 2014. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276566

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

А. Ресурсы «Интернет»

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elib.bashedu.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://www.biblioclub.ru
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети	http://e.lanbook.com

В. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Оборудование	Программное обеспечение
Аудитории № 517, №523, №531	Лекции	№517: Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор. ДА32. №523: Учебная мебель, доска настенная меловая №531: Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (2101068302), доска аудитор. ДА32.	1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.
Аудитории № 517, 526, 528	Лабораторные занятия	№517: Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор. ДА32. 526, 528: Учебная мебель, доска	1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.
Аудитории № 523, 526, 528	Групповые и индивидуальные	Учебная мебель, доска	

	консультации		
Читальный зал №2 (физико-математический корпус)	Самостоятельная работа	Учебная мебель, учебно- Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт	1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.

Приложение 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины _дополнительные главы функционального анализа__ на __4__ семестр
(наименование дисциплины)
___очная____
форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	6/216
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	55,7
лекций	18
практических/ семинарских	0
лабораторных	36
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1.7
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	125.5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету (контроль)	34.8

Форма(ы) контроля:
экзамен____4___ семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	4	5	6	7	8	9	10
1.	**Общие ряды Фурье в евклидовых пространствах.** Евклидовы пространства. Определение. Примеры ортогональных базисов. Теорема об ортогонализации. Ряды Фурье по заданной ортонормированной системе. Задача о наилучшем приближении. Полные и замкнутые системы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полные евклидовы пространства.	4		9	33	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.1,п.1.1-1.2; упр.1.1-1.5	Контрольная работа, доклад

	Теорема Рисса-Фишера. Критерий полноты ортонормированной системы.							
2.	**Пространства суммируемых функций.** Определение и свойства пространства $L_1(X,\mu)$. Полнота. Всюду плотные множества в $L_1(X,\mu)$. Сепарабельность. Определение и основные свойства пространства $L_2(X,\mu)$. Полнота, сеперабельность. Сходимость в среднем квадратичном, в среднем, равномерная сходимость, сходимость по мере, почти всюду. Связь между ними. Примеры для случаев $\mu(X)<\infty$,	4		9	34	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.1,1.3; упр. 1.6-1.11	Контрольная работа, доклад

	$\mu(X)=\infty$.							
3.	**Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам.** Тригонометрическая система в $L_2[-\pi;\pi]$. Классический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов. Сходимость в $L_2[-\pi;\pi]$ ряда Фурье. Тригонометрические системы в $L_2[0;\pi]$. Ряд Фурье в комплексной форме. Многочлены Лежандра. Многочлены, ортогональные относительно данного веса. Многочлены Чебышева. Ортогональный базис в пространствах $L_2[-\infty;+\infty]$ и $L_1[0;+\infty]$. Многочлены Эрмита	6		9	36	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.2, 2.1-2.3; упр. 2.1-2.5	Доклад

	и Лагерра. Системы Хаара.							
4.	**Условия сходимости ряда Фурье.** Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье. Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса	4		9	22,5	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.2, 2.4-2.5; упр. 2.6-2.14	доклад
	Всего часов:	18	0	36	125,5			