Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет"
Факультет математики и информационных технологий

Утверждено:	Согласовано:
на заседании кафедры ИТиКМ	Председатель УМК
протокол № 9 от 22 апреля 2020 г.	ФМ и ИТ
Зав. кафедрой А.М. Болотнов	А.М. Ефимов

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

дисциплина ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

(наименование дисциплины)

обязательная часть

(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультатив))

программа бакалавриата

Направление подготовки (специальность)

01.03.01 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

бакалавр

(указывается квалификация)

Разработчик (составитель) доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, к.ф.-м.н., доцент *(должность, ученая степень, ученое звание)*	/ Манапова А.Р. *(подпись, Фамилия И.О.)*

Для приема: 2020

Уфа 2020 г.

Составитель / составители: доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики Манапова А.Р.

Рабочая программа дисциплины *утверждена* на заседании кафедры, протокол № 9 от «22»___04____2020 г.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры

____

____

____,

протокол № ____ от «____» ____________ 20 _ г.

Заведующий кафедрой ___________________/ _____________Ф.И.О./

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры

____

____

____,

протокол № ____ от «____» ____________ 20 _ г.

Заведующий кафедрой ___________________/ _____________Ф.И.О./

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций[1] (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	*ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности*	*ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.*	*Обладать знаниями, полученными в области численных методов.*
		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	*Уметь использовать их в профессиональной деятельности.*
		ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	*Владеть методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*

2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «*Численные методы*» относится к обязательной части.

Дисциплина изучается на 4 курсе в 7 и 8 семестрах.

Цели изучения дисциплины: выработка у студентов глубоких знаний основ теории численных методов решения задач алгебры, анализа, дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), интегральных уравнений, умения применять эти

[1] Указывается только для УК и ОПК (при наличии).

знания при решении конкретных задач, встречающихся в разных областях естествознания посредством математического моделирования процессов.

3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4. Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	*Обладать знаниями, полученными в области численных методов.*	*Отсутствие знаний или фрагментарные представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*	*Неполные представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*	*Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*	*Сформированные систематические представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*

ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	*Уметь использовать их в профессиональной деятельности.*	*Отсутствие умений или фрагментарные умения в применении алгоритмов численных методов на языке программирования, формировании выводов.*	*В целом успешное, но не систематическое использование на практике основных алгоритмов численных методов на языке программирования, формировании выводов.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы в использовании на практике основных алгоритмов численных методов на языке программировании, формировании выводов.*	*Сформированное умение использовать на практике алгоритмы численных методов на языке программирования, формировать выводы.*
ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	*Владеть методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*Отсутствие владения или фрагментарное владение.*	*В целом успешное, но не систематическое владение методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*Владение методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*

Выше представлена таблица для формы промежуточного контроля – экзамен, для зачета указываем критерии оценивания для шкалы: «Зачтено», «Не зачтено».

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	*Обладать знаниями, полученными в области численных методов.*	*лабораторные работы; РГР; экзамен*
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	*Уметь использовать их в профессиональной деятельности.*	*лабораторные работы; РГР; экзамен*

ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	*Владеть методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*лабораторные работы; РГР; экзамен*

Критериями оценивания при *модульно-рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена:* текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; *для зачета:* текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(*для экзамена:*

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

Рейтинг-план дисциплины
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки *01.03.01 Математика*
курс **4**, семестр **VII**

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Численные методы решения задач линейной алгебры				
Текущий контроль			**0**	**30**
1. Отчёт по лабораторной работе №1	3	6	0	18
2. Отчёт по лабораторной работе №2	3	2	0	6
3. Отчёт по лабораторной работе №3	3	2	0	6
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. РГР, задания 1-4	5	4	0	20
Модуль 2. Решение систем нелинейных уравнений. Приближение функций				
Текущий контроль			**0**	**22**
1. Отчёт по лабораторной работе №4	14	1	0	14
2. Отчёт по лабораторной работе №5	4	2	0	8
Рубежный контроль			**0**	**28**
1. РГР, задания 5-11	4	7	0	28
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических занятий			0	-10
Поощрительные баллы			0	10
Итоговый контроль				
1. Зачет				110

Направление подготовки *01.03.01 Математика*
курс **4**, семестр **VIII**

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Численные методы решения задач УМФ				
Текущий контроль			**0**	**30**
1. Отчёт по лабораторной	3	6	0	18

работе №6				
2. Отчёт по лабораторной работе №7	6	1	0	6
3. Отчёт по лабораторной работе №8	6	1	0	6
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. РГР, задания 13-14	10	2	0	20
Модуль 2. Численные методы решения для ОДУ				
Текущий контроль			**0**	**10**
1. Отчёт по лабораторной работе №9	10	1	0	10
Рубежный контроль			**0**	**10**
1. РГР, задания 12	10	1	0	10
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических занятий			0	-10
			0	10
Итоговый контроль				
1. Экзамен				30
Поощрительные баллы				10
				110

Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета: состоит из двух вопросов теоретического характера.

Примерные вопросы для экзамена:

1. Введение в численные методы; постановка задачи интерполяции; интерполяционный многочлен Лагранжа; его существование и единственность;
2. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа; понятие о количестве арифметических операций, как об одном из критериев оценки качества алгоритма;
3. Разделенные разности; интерполяционный многочлен Лагранжа в форме Ньютона с разделенными разностями;
4. Многочлены Чебышева, их свойства;
5. Минимизация остаточного члена погрешности интерполирования; тригонометрическая интерполяция; дискретное преобразование Фурье;
6. Наилучшее приближение в нормированном пространстве; существование элемента наилучшего приближения; Чебышевский альтернанс, единственность многочлена наилучшего приближения вС; примеры;
7. Ортогональные многочлены; процесс ортогонализации Шмидта; запись многочлена в виде разложения по ортогональным многочленам, ее преимущества; рекуррентная формула

для вычисления ортогональных многочленов;

8. Сплайны; экстремальные свойства сплайнов; построение кубического интерполяционного сплайна;
9. Простейшие квадратурные формулы прямоугольников, трапеций; квадратурные формулы Ньютона-Котеса; оценки погрешности этих квадратурных формул;
10. Квадратурные формулы Гаусса, их построение, положительность коэффициентов, коэффициентов, сходимость;
11. Составные квадратурные формулы, оценки погрешности;
12. Интегрирование сильно осциллирующих функций; вычисление интегралов в нерегулярных случаях;
13. Численное дифференцирование, вычислительная погрешность формул численного дифференцирования;
14. Правило Рунге оценки погрешности;
15. Основные задачи линейной алгебры, метод Гаусса; метод простой итерации, теорема о достаточном условии сходимости, необходимое и достаточное условие сходимости;
16. Метод простой итерации для симметричных положительно определенных матриц, оптимизация параметра процесса; процесс ускорения сходимости итераций; метод наискорейшего градиентного спуска; метод Зейделя;
17. Методы решения нелинейных уравнений (метод бисекций, метод простой итерации и метод Ньютона);
18. Метод разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши дляОДУ, метод Эйлера и его модификации, методы Рунге-Кутта;
19. Конечно-разностные методы, понятие об аппроксимации, исследование свойств конечно-разностных схем на модельных примерах;
20. Основные понятия теории разностных схем аппроксимация, устойчивость, сходимость;
21. Аппроксимация, устойчивость и сходимость для простейшей краевой задачи дляОДУ второго порядка;
22. Методы решения системы ЛАУ с трехдиагональной матрицей (метод стрельбы и метод прогонки);
23. Метод конечных элементов;
24. Простейшие разностные схемы для уравнения переноса, спектральный признак устойчивости, примеры;
25. Простейшие разностные схемы для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной, явная и неявная схемы, схема с весами, устойчивость и аппроксимация схемы с весами, схема со вторым порядком аппроксимации;
26. Разностная схема для уравнения Пуассона в прямоугольнике, ее корректность;
27. Методы решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона (метод Гаусса, метод разложения в дискретный ряд Фурье, метод простой итерации);
28. Численные методы решения интегральных уравнений второго рода;
29. Метод регуляризации решения интегральных уравнений первого рода.

Образец экзаменационного билета:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №1
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Фундаментальная теорема Самарского о сходимости неявных итерационных процессов и ее приложение к доказательству сходимости метода Ричардсона с итерационным параметром.

2. Разностная схема Эйлера решения задачи Коши для ОДУ. Погрешность аппроксимации и сходимость.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:
- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.
- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.
- **10-16** баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.
- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Образец лабораторной работы:

<u>Лабораторная работа № …</u>

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения СЛАУ. Итерационные методы

1) Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня (а), схемой Холецкого (б), методом вращения (в) или методом отражения (г):

$$Ax = b,$$

где

а)	$\begin{aligned} &19x_1 - 4x_2 + 6x_3 - x_4 = 100, \\ &-4x_1 + 20x_2 - 2_3 + 7x_4 = -5, \\ &6x_1 - 2x_2 + 25x_3 - 4x_4 = 34, \\ &-x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 15x_4 = 69. \end{aligned}$	д)	$\begin{aligned} &15x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -24, \\ &x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -47, \\ &-5x_1 + 2x_2 + 14x_3 - 6x_4 = 28, \\ &3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 16x_4 = -50. \end{aligned}$
б)	$\begin{aligned} &24x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 = -9, \\ &2x_1 + 27x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -76, \\ &4x_1 - 6x_2 + 22x_3 - 8x_4 = -79, \\ &-9x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 23x_4 = -70. \end{aligned}$	е)	$\begin{aligned} &22x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -24, \\ &-3x_1 + 19x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 40, \\ &-8x_1 - 6x_2 + 23x_3 - 7x_4 = -84, \\ &7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 18x_4 = -56. \end{aligned}$
в)	$\begin{aligned} &24x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 20, \\ &-7x_1 + 21x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -16, \\ &-4x_1 + 3x_2 + 19x_3 + 7x_4 = 14, \\ &4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 20x_4 = -81. \end{aligned}$	ж)	$\begin{aligned} &10x_1 - x_2 - 2x_3 + 5_4 = 95, \\ &-x_1 + 12x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -41, \\ &-2x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 8x_4 = 69, \\ &5x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 18x_4 = 27. \end{aligned}$
г)	$\begin{aligned} &12x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -26, \\ &-3x_1 + 15x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -55, \\ &-x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 = -58, \\ &3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 = -24. \end{aligned}$		

2) Вычислить невязку $\left(A\tilde{x} - b\right)$, где $\tilde{x}$ – полученное решение.

3) Уточнить полученное решение методом простых итераций с параметром (в качестве параметра взять $\tau = \dfrac{2}{\| A \|_*}$, обосновать выбор параметра) (а), методом Якоби (б), методом Гаусса-Зейделя (в), методом верхней релаксации (г), методом минимальных невязок (д) или методом сопряженных градиентов (ж), взяв в качестве начального приближения целую часть полученного прямым методом решения $\tilde{x}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

4) Вычислить число обусловленности матрицы системы $M_A = \| A \|_* \cdot \| A^{-1} \|_*$.

<u>Указания и требования.</u> Выбрать прямой метод решения СЛАУ по следующему принципу: все те у кого номер варианта N – число нечетное используют для пункта 1) метод квадратного корня, все остальные (номер варианта число N – число четное) для решения СЛАУ используют схему Халецкого. Итерационный метод выбирается следующим образом: первый вариант выбирает (а), второй вариант выбирает (б), третий вариант, соответственно, (в), четвертый – (г), пятый – (д), шестой – (ж), седьмой – (а) и т.д. Взять следующий критерий останова итераций – $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_* < \varepsilon$. В качестве векторной нормы $\| \cdot \|_*$ взять следующие наиболее употребительные нормы – $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ $\| \cdot \|_\infty$. При вычислении параметра в методе простых итераций и числа обусловленности M_A взять в качестве матричной нормы – $\| A \|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} |$ или $\| A \|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |$, где n – размерность матрицы A. Выдать также на печать матрицы, получаемые при разложении в методе квадратного корня и схемы Холецкого. Оформить отчет.

Литература к выполнению лабораторной работы

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань". 2007.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: «Наука». 1989.
3. Лубышев Ф.В. Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в конечномерных пространствах: Учебное пособие. Часть I. Элементы общей теории и алгоритмы. – Уфа: РИЦ БашГУ. 2009.
4. Амосов А.А, Дубинский Ю.А, Копченова Н.В. Вычислительные методы: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань". 2014.

Описание методики оценивания (седьмой семестр):

Лабораторная работа №1. «Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №1
- 18 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 12 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 6 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №2. «Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения СЛАУ».

Лабораторная работа №3. «Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №2,3
- 6 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 4 балла выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;

- 2 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №4. «Методы решения систем нелинейных уравнений».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №4
- 14 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 8 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 5 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №5. «Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц. Приближение функций»

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №5
- 8 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 5 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 3 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Описание методики оценивания (восьмой семестр):

Лабораторная работа №6. «Метод Ритца решения граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №6
- 18 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 15 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 10 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №7. «Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа».

Лабораторная работа №8. «Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №7,8
- 6 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 4 балла выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 2 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №9. «Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №9
- 10 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 6 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 3 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Пример заданий для РГР

РГР состоит из 14 задач. Задания 1-4 по численным методам решения задач линейной алгебры. Задания 5-11 по решению систем нелинейных уравнений и приближению функций. Задание 12 по численным методам решения для ОДУ. Задания 13-14 по численным методам решения задач УМФ.

1) Рассмотрите СЛАУ, приведенную к виду, удобному для итераций по методу последовательных приближений:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3x_1 - 0.1x_2 + 1, \\ x_2 = 0.2x_1 - 0.4x_2 + 0.01x_3 - 2, \\ x_3 = \qquad 0.2x_2 + 0.1x_3 + 5. \end{cases}$$

Запишите расчетные формулы. Найдите норму матрицы системы и проверьте условие сходимости метода последовательных приближений для данной СЛАУ.

2) Рассмотрите вопрос о применении метода Якоби к решению СЛАУ вида

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 = -3. \end{cases}$$

Запишите расчетные формулы.

3) Рассмотрите вопрос о применении метода Гаусса-Зейделя к решению СЛАУ вида

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6, \\ -2x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Запишите расчетные формулы метода Гаусса-Зейделя к решению СЛАУ.

4) Обоснуйте возможность решения СЛАУ вида

$$Ax = f, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

методом Ричардсона с итерационным параметром $\tau > 0$.

Запишите расчетные формулы метода. Найдите число обусловленности матрицы A.

5) Найдите конечные разности функции $y = f(x) = x^3$ с шагом $h = 1$:

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y.$$

6) Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений $y_i = f(x_i)$:

i	0	1	2	3	4
x_i	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	4	5	5.5	5.7	5.8

Вычислите значения функции в точке $x = 2.3$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

7) Для функции $f(x) = \sin \pi x$ на отрезке $[0, 2]$ постройте наилучший интерполяционный многочлен 3-го порядка. Постройте графики многочлена и данной функции в одной системе координат.

8) Постройте кубический сплайн для функции $f(x) = \sin \pi x$ на отрезке $[0, 2]$, используя разбиение отрезка на $n = 10$ частей. Найдите значение в точке $x = 0.48$.

9) Найдите параметры показательной функции $f(x) = ae^{bx}$ по заданной таблице значений $(x_k, f(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_k)$	1	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2	2.1	2.5	3

Приведите график функции. Покажите, что результатом является аппроксимирующая функция

$$y = 0{,}951393e^{0.108926x}.$$

10) Вычислите приближенно производную второго порядка с помощью формулы

$$y_{\bar{x}x}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = f^h(x) + O(h^2)$$

и сравните с точными значениями второй производной функции $y = f(x) = \sin \pi x$ в точках отрезка [0,1] с шагами $h = 0.2$ и $h = 0.1$. Проанализируйте результаты в результате уменьшения шага в два раза (во сколько раз уменьшилась ошибка?)

11) Вычислить интеграл

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

по формулам трапеций, Симпсона, Ньютона-Котеса:

$$\int_c^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h = h\left[\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right], \; h = \frac{b-a}{N}, \; N = 10;$$

$$\int_c^b f(x)dx \cong \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{2m-2} \left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right), \quad N = 2m;$$

$$\int_c^b f(x)dx \cong \frac{5h}{288}\left[19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5)\right].$$

Найдите точное значение интеграла J и относительные погрешности $\delta_{\text{тр.}}$, $\delta_{\text{Симп.}}$ и $\delta_{\text{Н.Котеса}}$.

12) Найдите приближенное методом Эйлера на отрезке [1,2] задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{2t}, \qquad u(1) = 0$$

(точное решение задачи $u(t) = \mathrm{tg}\left(\ln\sqrt{t}\right)$).

Расчеты проводить с шагом $\tau = 0.1$.

13) Для начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((\cos^2 x + 0{,}1)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T = 1,$$

$$u(x,0) = 1 - x, \quad u(0,t) = \cos t,\ u(1,t) = 0,$$

постройте устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ (где h и τ – шаги пространственной и временной сеток).

14) Для краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1 + x^2 y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((1 + xy^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$

$$u(x,y) = \mu(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma,$$

постройте устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации.

Описание методики оценивания:

Критерии оценки:

За первую часть РГР (задания 1-4)

- 20 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 4 задания;
- 15 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 3 задания;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания;
- 5 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 1 задание.

За вторую часть РГР (задания 5-11)

- 28 баллов выставляется студенту, если верно выполнены7 заданий;
- 23 балла выставляется студенту, если верно выполнены 5-6 заданий;
- 15 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 3-4 задания;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания.

За третью часть РГР (задания 13-14)

- 20 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 1 задание.

За четвертую часть РГР (задание 12)

- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнено задание;
- 5 баллов выставляется студенту, если задание выполнено частично.

Зачет за РГР выставляется, если студент набрал 53 балла и выше (15 баллов и выше - за первую часть, 23 балла и выше - за вторую часть РГР, 10 баллов и выше - за третью часть, 5 баллов и выше – за четвертую часть РГР).

5. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Волков Е.А. Численные методы. [Электронный ресурс] / Волков Е.А. — 5-е изд., перераб. и доп. - СПб.: «Лань», 2008. - 256 с.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Издательство «Лань»".— ISBN: 978-5-8114-0538-1— <http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=54>.

Дополнительная литература:

2. Срочко В.А. Численные методы. Курс лекций [Электронный ресурс] / Срочко В.А. — 1-е изд. - СПб.: «Лань», 2010. - 208 с.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Издательство «Лань»".— ISBN: 978-5-8114-1014-9— <http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=378>.

3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Электронный ресурс] / Демидович Б.П. — 5-е изд. стер. - СПб.: «Лань», 2010. - 400 с.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Издательство «Лань»". — ISBN: 978-5-8114-0799-6— <http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=537>.

Рекомендуемые периодические издания (журналы):

1. Журнал «Дифференциальные уравнения» / гл. ред. академик РАН В.А. Ильин – М.: ООО Международная академическая издательская компания "Наука/Интерпериодика", выпускается с 1965г.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Научную-электронную библиотеку eLibrary.ru. — ISSN: 0374-0641— http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9677.

2. Журнал «Вычислительной математики и математической физики» / гл. ред. Ю.С. Осипов – М.: ООО Международная академическая издательская компания "Наука/Интерпериодика", выпускается с 1961г.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Научную-электронную библиотеку eLibrary.ru. — ISBN: 0044-4669— http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7791.

3. Журнал «Прикладная информатика»/ гл. ред. Емельянов А.А., — М.: «Синергия ПРЕСС», выпускается с 2006г.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Издательство «Лань»". — ISBN: 1993-8314 — <http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_cid=227&pl10_id=2067>.

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elib.bashedu.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://www.biblioclub.ru
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://e.lanbook.com
4	Универсальная Базы данных EastView	Доступ к электронным научным журналам	Доступ из любой точки сети Интернет	Доступ из любой точки сети Интернет	https://dlib.eastview.com/browse
5	Научная электронная библиотека - elibrary.ru	Доступ к электронным научным журналам	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp
6	Электронная	Доступ для чтения	Авторизован	Регистрация из	http://diss.rsl.ru/

	библиотека диссертаций РГБ	электронных версий диссертаций	ный доступ по паролю из сети БашГУ	сети БашГУ, доступ из сети БашГУ	

В. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины
1.Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.

2.Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

6.Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	**Вид занятий**	**Оборудование**	**Программное обеспечение**
1	**2**	**3**	**4**
Аудитории 502, 528, 530	Лекция	Учебная мебель, доска настенная меловая	
Аудитории 502, 503, 526, 527, 530	Лабораторное, практическое занятия	Учебная мебель, доска настенная меловая	
Аудитории 524	Выполнение курсовых работ, тестиро- вание	Учебная мебель, доска настенная меловая, коммутатор HP V1905-24 Switch 24*10/100+2*10/100/1000, персональный компьютер в комплекте HP AiO 20"CQ 100 eu – 27 шт., экран ScreeMediaGolgview 274*206 NW 4:3, универсальное потолочное крепление ScreeMedia для проектора, регулировка высоты, шкаф TLKTWP-065442-G-GY, патч-корд (1296), доска аудитор. ДА32	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные. 3. Система централизованного тестирования БашГУ (Moodle)
Аудитории 531	Лекции, лабораторное, практическое занятия, тестирование	Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (2101068302), доска аудитор. ДА32	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

читальный .... №2 (физико-математический корпус)	Самостоятельна работа, выполнение курсовой работы	Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

Приложение № 1

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ[2]

дисциплины _Численные методы_ на 7, 8 семестры
(наименование дисциплины)
_очная__
форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (з.е. / часов)	7/252
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	145.9
лекций	72
практических/ семинарских	
лабораторных	72
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	1.9
из них, предусмотренные на выполнение курсовой работы / курсового проекта[3]	
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	80.3
из них, предусмотренные на выполнение курсовой работы / курсового проекта[4]	
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	25.8

Форма(ы) контроля:
зачет 7-й семестр
экзамен8-йсеместр
РГР 8-й семестр

[2] *Количество часов/з.е. указывается в соответствии с учебным планом, таблицы заполняются отдельно по каждой форме обучения (очной, очно-заочной, заочной).*
[3] *Контактных часов – 2*
[4] *Количество часов на самостоятельную работу указывается на усмотрение разработчика, но* ***не более 20 часов***

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР		
1	2	3	4	5	6	7	8
	7-й семестр	36		36	35.8		
1	**Введение.** Дисциплина «Численные методы» – важнейший раздел математики, методы и задачи вычислительной математики, перспективы развития как важнейшего раздела математики; роль методов вычислений в дальнейшем прогрессе науки и техники на соврем.этапе.	1				1-3	
2.	**Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).**	4		10	5	1-3	
2.1	Общая характеристика и классификация методов решения СЛАУ. Метод Гаусса и его алгебраическая основа: схема единственного деления и ее связь с разложением матрицы на множители; теорема об LU-разложении, условия применимости метода Гаусса. Вычисление определителя и обратной матрицы.	1				1-3	
2.2	Метод Гаусса с выбором главного элемента, ошибки округления, понятие об устойчивости прямых методов. Компактная схема метода Гаусса (метод основанный на LU-разложении). Понятие о методах оптимального исключения, Жордана, отражений.	1		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
2.3	Метод квадратных корней (метод, основанный на	1		4		1-3	отчет по

	S*DS-разложении), схема Холецкого						лабо-раторной работе
2.4	Операторные уравнения первого рода. Корректно и некорректно поставленные задачи, устойчивость (на примере решения СЛАУ). Возмущения, мера обусловленности уравнения и число обусловленности невырожденного линейного оператора. Оценка относительной погрешности; влияние погрешности округления при решении СЛАУ прямыми методами. Оценки достоверности решений, получаемых прямыми методами (процедура итерационного уточнения решения, апостериорные оценки числа обусловленности). Понятие о методе регуляризации решения уравнения. Согласованная и подчиненная нормы операторов $A \in L\ (X_n \to X_n)$ с заданными векторными нормами в конечномерном пространстве X_n. Наиболее употребительные нормы векторов и матричные нормы оператора, индуцированные векторными нормами.	1		2		1-3	РГР
3.	**Итерационные методы решения линейных операторных уравнений**	7		10	5	1-3	
3.1	Введение. Общая характеристика итерационных методов решения СЛАУ как операторных уравнений первого рода. Основные понятия итерационных методов: сходимость, число итераций, качество итерационного процесса; классификация итерационных методов, принципы их построения. Теорема о «неподвижной точке» итерационных процессов.	1		2		1-3	
3.2	Метод последовательных приближений для линейных уравнений второго рода. Необходимый и достаточный признак сходимости; достаточное условие сходимости, оценки погрешности.	1				1-3	
3.3	Основная теорема А. А. Самарского о сходимости итераций общего неявного стационарного процесса простой итерации. Частные случаи теоремы: достаточные условия сходимости явного метода	1		2		1-3	

	простых итераций и модифицированного метода простых итераций (метода Якоби). Другие достаточные условия сходимости метода Якоби.						
3.4	Теорема А. А. Самарского о скорости сходимости общего неявного стационарного метода простой итерации.	1				1-3	
3.5	Оптимизация скорости сходимости общих неявных стационарных процессов простых итераций, основанная на использовании энергетически эквивалентных операторов; оценки погрешности. Оптимальный линейный итерационный процесс простых итераций, оценка погрешности. Оценки для числа итераций. Понятие о Чебышевском циклическом итерационном процессе (метод Ричардсона).	1				1-3	
3.6	Итерационные методы вариационного типа. Метод минимальных невязок и скорейшего спуска. Понятие о методе сопряженных градиентов.	1		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
3.7	Треугольны итерационные методы. Метод Гаусса-Зейделя; необходимый и достаточный признак сходимости; достаточные признаки сходимости. Метод последовательной релаксации (SOR); достаточные условия сходимости.	1		2		1-3	отчет по лабо-раторной работе
4.	**Проблема собственных значений.**	4		4	5	1-3	
4.1	Полная проблема собственных значений. Метод вращений (метод Якоби).	1				1-3	
4.2	Частичная проблема собственных значений. Итерационный степенной метод нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.	2		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
4.3	Метод скалярных произведений. Метод обратных итераций. Ускорение сходимости метода обратных итераций: метод Виландта.	1				1-3	
5	**Итерационные методы решения нелинейных операторных уравнений.**	8		4	5	1-3	
5.1	Метод последовательных приближений (простых	4				1-3	

	итераций) решения нелинейных уравнений. Принцип сжатых отображений. О качестве итераций и скорости сходимости (оценки). Метод простых итераций для нелинейных систем алгебраических и трансцендентных уравнений (следствия из общего случая); геометрическая интерпретация метода простой итерации для случая одного скалярного уравнения. Метод взятия в вилку (метод половинного деления).						
5.2	Метод Ньютона и Ньютона-Канторовича решения нелинейных операторных уравнений. Метод Ньютона применительно к нелинейным системам алгебраических и трансцендентных уравнений; геометрическая интерпретация метода на случай одного скалярного уравнения. Метод хорд, комбинированный метод, метод секущих.	2		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
5.3	Понятие о методах, основанных на минимизации функционалов и методе продолжения решения по параметру.	2				1-3	
6.	**Приближение функций.**	12		8	15.8	1-3	
6.1	Введение. Постановка задачи о наилучшем приближении в линейном нормированном пространстве и возникающие проблемы. Общие теоремы о наилучшем приближении: теоремы существования и единственности. Некоторые свойства наилучших приближений и элементов наилучшего приближения.	1				1-3	
6.2	Наилучшее приближение в Гильбертовом пространстве и вопросы, возникающие при его практическом построении: теоремы о существовании и единственности; критерии существования наилучшего приближения; ортогонализация, определитель Грамма и его свойства; теорема Теплера.	1				1-3	
6.3	Наилучшие среднеквадратичные приближения (непрерывный и дискретный случаи) функций по весу и их необходимость. Среднеквадратичные приближения по весу функций алгебраическими многочленами; ортогональные многочлены	2				1-3	

	(свойства, и их применение к нахождению среднеквадратичного приближения функций по весу) классические ортогональные многочлены.						
6.4	Наилучшее равномерное приближение непрерывных на компакте функций обобщенными и алгебраическими многочленами заданной степени: теоремы Хаара, Бореля, Вале-Пуссена, Чебышева (об альтернансе, доказательство достаточности); теорема единственности.	2				1-3	
6.5	Некоторые результаты о влиянии структурных свойств функций на величину ее наилучшего приближения – теоремы Джексона и Бернштейна (без доказательств). Построение многочленов наилучшего приближения: многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля; примеры; понятия об алгоритме Ремеза.	2				1-3	РГР
6.6	Интерполирование функций. Постановка задачи. Интерполирование обобщенными и алгебраическими многочленами заданной степени, теоремы существования и единственности. Многочлены Лагранжа на неравномерной и равномерной сетке узлов. Процесс Эйткена.	2		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
6.7	Конечные и разделённые разности, их свойства. Интерполяционная формула Ньютона на неравномерной сетке и на равномерных сетках узлов. Оценки погрешностей интерполяционных формул; сходимость интерполяционного процесса.	1				1-3	
6.8	Интерполирование функций с помощью сплайнов; существование и единственность кубического сплайна. Экстремальное свойство кубического сплайна. Оценки погрешности (без доказательств). Понятие о сплайне сглаживающем.	1		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
	8-й семестр	36		36	44.5		
7.	**Численное дифференцирование и интегрирование**	7		8	10	1-3	
7.1	Постановка задачи численного дифференцирования и её некорректность. Простейшие формулы численного дифференцирования. Погрешность	1				1-3	

	формул, метод Рунге-Ромберга. Понятие о квазиравномерных сетках и регуляризации дифференцирования.						
7.2	Постановка задачи численного интегрирования, подходы к построению квадратурных формул. Интерполяционные квадратурные формулы с наперед заданными узлами, теорема об их точности. Оценки погрешности интерполяционных квадратурных формул.	0,5				1-3	
7.3	Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Численная устойчивость квадратурных формул. Простейшие из формул Ньютона-Котеса; трапеций, Симпсона (парабол), прямоугольников; составные квадратурные формулы, основанные на них; оценки погрешности формул.	0,5		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе
7.4	Апостериорная оценка погрешности методом Рунге; автоматический выбор шага интегрирования. Уточнение приближенного решения по Ричардсону.	1		2		1-3	отчет по лабо-раторной работе
7.5	Оптимизация квадратурных формул. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса-Кристоффеля). Критерии наивысшей алгебраической степени точности; существование и единственность формул наивысшей степени точности. Свойства квадратурных коэффициентов формул наивысшей степени точности, формулы для их определения. Погрешность квадратурных формул наивысшей степени точности.	1				1-3	
7.6	Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности, отвечающие классическим весовым функциям: постоянному весу (формула Гаусса), весу Якоби, весу Чебышева-Лагерра, весу Чебышева-Эрмита. Квадратурные формулы с равными коэффициентами, их существование и единственность; случай постоянного веса.	1		2		1-3	отчет по лабо-раторной работе
7.7	Некоторые замечания о применении квадратурных формул. Нестандартные формулы: разрывные функции, нелинейные формулы, сильно	1				1-3	отчет по лабо-

	осциллирующие функции, переменный предел интегрирования, несобственные интегралы.						раторной работе
7.8	Сходимость квадратурного процесса. Теоремы о сходимости.	1				1-3	
8.	**Проекционно-вариационные методы**	6		10	10	1-3	
8.1	Вариационные методы. Общие положения. Минимизирующие последовательности функционала, сходимость к не пустому множеству; корректно и некорректно поставленные задачи минимизации функционалов. Примеры.	1				1-3	
8.2	Приближенное решение операторных уравнений энергетическим методом. Теорема о единственности решения операторных уравнений в Гильбертовом пространстве и о функционале энергии. Теорема о сходимости минимизирующей последовательности функционала энергии.	1				1-3	
8.3	Классический метод Ритца; теорема о минимуме функционала энергии в конечномерном подпространстве. Теорема о минимизирующей последовательности классического метода Ритца, ее сходимости и оценке приближения.	1		6		1-3	отчет по лабо-раторной работе
8.4	Понятие об энергетическом пространстве H_A положительно определённого оператора и его структуре (без доказательства). Теорема о минимуме функционала энергии в H_A; обобщенное решение операторного уравнения. Метод Ритца в энергетических пространствах; теорема сходимости приближений по Ритцу в H_Aк обобщенному решению уравнения. Общие замечания, связанные с решением системы Ритца: вопросы устойчивости, оценки погрешности приближения.	1				1-3	
8.5	Понятие о методах: моментов (Галёркина-Петрова), Бубнова-Галёркина, наименьших квадратов.	1		2		1-3	отчет по лабо-раторной работе
8.6	Применение энергетического метода к решению краевых задач для эллиптического уравнения: постановка задач; формулы Грина для	1		2		1-3	отчет по лабо-раторной

	дифференциальных операторов; неравенство Фридрихса; положительная определённость оператора краевой задачи для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами; метод Ритца и его сходимость.						работе
9	**Разностные методы решения задач математической физики**	7		8	9.5	1-3	
9.1	Введение. Общие вопросы метода сеток: сетки и сеточные функции, пространство сеточных функций, сеточные нормы, локальная аппроксимация и аппроксимация на сетке, погрешность аппроксимации дифференциальных операторов разностными, постановка разностной схемы, погрешность разностной схемы, порядок точности разностной схемы; корректность разностных схем, порядок аппроксимации разностных схем, связь корректности и аппроксимации разностных схем со сходимостью.	1				1-3	
9.2	Некоторые разностные формулы: формула разностного дифференцирования произведения и суммирования по частям, разностные формулы Грина, некоторые разностные аналоги теорем вложения для сеточных функций.	1		2		1-3	
9.3	Метод прогонки решения трехточечных разностных уравнений и его устойчивость. Принцип максимума.	1		6		1-3	отчет по лабо-раторной работе
9.4	Разностные схемы краевых задач для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами: постановка задач, корректность, сходимость разностных схем, методы решения сеточных задач.	1				1-3	РГР
9.5	Однородные разностные схемы начально-краевых задач для параболического уравнения с переменными коэффициентами: постановка задач, построение разностных схем с весами, погрешность аппроксимации, устойчивость, сходимость, решение сеточных задач.	1				1-3	

9.6	Однородные разностные схемы для гиперболических уравнений: постановка задачи, погрешность аппроксимации, устойчивость (без доказательства), решение сеточных уравнений.	1				1-3	
9.7	Понятие о вариационно-разностном методе (методе конечных элементов) и других методах построения разностных схем для уравнений математической физики.	1				1-3	
10.	**Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**	10		8	10	1-3	
10.1	Введение. Постановка исходной задачи. Вопросы корректности постановки. Различные методы приближенного и численного решения задачи Коши. Простейшие разностные схемы решения задачи Коши: разностная схема Эйлера (явная схема), симметричная схема (неявная схема). Понятие о сходимости метода и порядке точности метода. Понятие о невязке или погрешности аппроксимации схемы; аппроксимации и порядке аппроксимации разностного метода. Порядок аппроксимации метода Эйлера и симметричной схемы. Порядок точности схемы Эйлера.	2		5		1-3	отчет по лабо-раторной работе
10.2	Одношаговые методы Рунге-Кутта. Общая формулировка методов. Семейство методов второго порядка аппроксимации и частные случаи семейства: схемы (двухэтапные) предиктор-корректор. Сходимость методов Рунге-Кутта (теорема о сходимости). Связь порядков аппроксимации и точности. Метод Рунге повышения точности решения задачи Коши на последовательности сеток.	2		1		1-3	
10.3	Многошаговые разностные методы решения задачи Коши. Формулировка методов: явные и неявные методы, явные и неявные методы Адамса. Погрешность аппроксимации многошаговых методов на решениях или невязка разностного метода; наивысший порядок аппроксимации. Понятие об устойчивости и сходимости многошаговых методов. Примеры многошаговых	2		4		1-3	отчет по лабо-раторной работе

	методов Адамса (явных и неявных).						
10.4	Понятие о численном интегрировании жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	2				1-3	
10.5	Некоторые другие методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: понятие о методе стрельбы, методе Ньютона.	2				1-3	РГР
11.	**Численные методы решения интегральных уравнений.**	6		5	5	1-3	
	Итого						
	Всего часов:	72		72	143.3		

Приложение к
рабочей программе дисциплины

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Фонд оценочных средств

по учебной дисциплине

«Численные методы»

наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

программа бакалавриата

01.03.01 Математика

шифр и наименование направления

"Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

направленность (профиль) подготовки

Список документов и материалов

1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.
2. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

1. **Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.**

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	*Обладать знаниями, полученными в области численных методов.*	*Отсутствие знаний или фрагментарные представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*	*Неполные представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*	*Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*	*Сформированные систематические представления об основных численных методах и алгоритмах решения математических задач из разделов: теория аппроксимации, численное интегрирование, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, иметь представление о существующих пакетах прикладных программ.*
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	*Уметь использовать их в профессиональной деятельности.*	*Отсутствие умений или фрагментарные умения в применении алгоритмов численных методов на языке программирования, формировании выводов.*	*В целом успешное, но не систематическое использование на практике основных алгоритмов численных методов на языке программирования, формировании*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы в использовании на практике основных алгоритмов численных методов на языке программирования,*	*Сформированное умение использовать на практике алгоритмы численных методов на языке программирования, формировать выводы.*

			выводов.	*формировании выводов.*	
ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	*Владеть методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*Отсутствие владения или фрагментарное владение.*	*В целом успешное, но не систематическое владение методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*Владение методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*

2. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	*Обладать знаниями, полученными в области численных методов.*	*лабораторные работы; РГР; экзамен*
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	*Уметь использовать их в профессиональной деятельности.*	*лабораторные работы; РГР; экзамен*
ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	*Владеть методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.*	*лабораторные работы; РГР; экзамен*

Критериями оценивания при *модульно–рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена:* текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; *для зачета:* текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(*для экзамена:*

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета: состоит из двух вопросов теоретического характера.

Примерные вопросы для экзамена:

1. Введение в численные методы; постановка задачи интерполяции; интерполяционный многочлен Лагранжа; его существование и единственность;
2. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа; понятие о количестве арифметических операций, как об одном из критериев оценки качества алгоритма;
3. Разделенные разности; интерполяционный многочлен Лагранжа в форме Ньютона с разделенными разностями;
4. Многочлены Чебышева, их свойства;
5. Минимизация остаточного члена погрешности интерполирования; тригонометрическая интерполяция; дискретное преобразование Фурье;
6. Наилучшее приближение в нормированном пространстве; существование элемента наилучшего приближения; Чебышевский альтернанс, единственность многочлена наилучшего приближения вC; примеры;
7. Ортогональные многочлены; процесс ортогонализации Шмидта; запись многочлена в виде разложения по ортогональным многочленам, ее преимущества; рекуррентная формула для вычисления ортогональных многочленов;
8. Сплайны; экстремальные свойства сплайнов; построение кубического интерполяционного сплайна;
9. Простейшие квадратурные формулы прямоугольников, трапеций; квадратурные формулы Ньютона-Котеса; оценки погрешности этих квадратурных формул;
10. Квадратурные формулы Гаусса, их построение, положительность коэффициентов, коэффициентов, сходимость;
11. Составные квадратурные формулы, оценки погрешности;
12. Интегрирование сильно осциллирующих функций; вычисление интегралов в нерегулярных случаях;
13. Численное дифференцирование, вычислительная погрешность формул численного дифференцирования;
14. Правило Рунге оценки погрешности;
15. Основные задачи линейной алгебры, метод Гаусса; метод простой итерации, теорема о достаточном условии сходимости, необходимое и достаточное условие сходимости;
16. Метод простой итерации для симметричных положительно определенных матриц, оптимизация параметра процесса; процесс ускорения сходимости итераций; метод наискорейшего градиентного спуска; метод Зейделя;
17. Методы решения нелинейных уравнений (метод бисекций, метод простой итерации и метод Ньютона);
18. Метод разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши дляОДУ, метод Эйлера и его модификации, методы Рунге-Кутта;
19. Конечно-разностные методы, понятие об аппроксимации, исследование свойств конечно-разностных схем на модельных примерах;
20. Основные понятия теории разностных схем аппроксимация, устойчивость, сходимость;
21. Аппроксимация, устойчивость и сходимость для простейшей краевой задачи дляОДУ

второго порядка;

22. Методы решения системы ЛАУ с трехдиагональной матрицей (метод стрельбы и метод прогонки);

23. Метод конечных элементов;

24. Простейшие разностные схемы для уравнения переноса, спектральный признак устойчивости, примеры;

25. Простейшие разностные схемы для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной, явная и неявная схемы, схема с весами, устойчивость и аппроксимация схемы с весами, схема со вторым порядком аппроксимации;

26. Разностная схема для уравнения Пуассона в прямоугольнике, ее корректность;

27. Методы решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона (метод Гаусса, метод разложения в дискретный ряд Фурье, метод простой итерации);

28. Численные методы решения интегральных уравнений второго рода;

29. Метод регуляризации решения интегральных уравнений первого рода.

Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.

- 10-16 баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.

- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Экзаменационные билеты – Приложение №2.

Расчётно-графические работы

РГР состоит из 14 задач. Задания 1-4 по численным методам решения задач линейной алгебры. Задания 5-11 по решению систем нелинейных уравнений и приближению функций. Задание 12 по численным методам решения для ОДУ. Задания 13-14 по численным методам решения задач УМФ.

Критерии оценки (в баллах):

За первую часть РГР (задания 1-4)

- 20 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 4 задания;
- 15 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 3 задания;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания;
- 5 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 1 задание.

За вторую часть РГР (задания 5-11)

- 28 баллов выставляется студенту, если верно выполнены7 заданий;
- 23 балла выставляется студенту, если верно выполнены 5-6 заданий;
- 15 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 3-4 задания;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания.

За третью часть РГР (задания 13-14)
- 20 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 1 задание.

За четвертую часть РГР (задание 12)
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнено задание;
- 5 баллов выставляется студенту, если задание выполнено частично.

Варианты РГР – Приложение №3.

Зачет за РГР выставляется, если студент набрал 53 балла и выше (15 баллов и выше - за первую часть, 23 балла и выше - за вторую часть РГР, 10 баллов и выше - за третью часть, 5 баллов и выше – за четвертую часть РГР).

Лабораторные работы

Лабораторная работа №1. «*Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента*».

Критерии оценки (в баллах):

За отчёт по лабораторной работе №1
- 18 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 12 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 6 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №2. «*Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения СЛАУ*».

Лабораторная работа №3. «*Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы*».

Критерии оценки (в баллах):

За отчёт по лабораторной работе №2,3
- 6 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 4 балла выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 2 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №4. «*Методы решения систем нелинейных уравнений*».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №4
- 14 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 8 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 5 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №5. «*Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц. Приближение функций»*

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №5
- 8 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 5 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 3 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №6. «*Метод Ритца решения граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения*».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №6
- 18 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 15 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 10 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №7. «*Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа*».

Лабораторная работа №8. «*Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности*».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №7,8
- 6 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 4 балла выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 2 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Лабораторная работа №9. «*Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений*».

Критерии оценки (в баллах):
За отчёт по лабораторной работе №9
- 10 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;
- 6 баллов выставляется студенту, если имеются несущественные замечания;
- 3 балла выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

Варианты заданий для лабораторных работ – Приложение №4.

Приложение 1

Рейтинг-план дисциплины по семестрам
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки *01.03.01 Математика*
курс **4**, семестр **VII**

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Численные методы решения задач линейной алгебры				
Текущий контроль			**0**	**30**
1. Отчёт по лабораторной работе №1	3	6	0	18
2. Отчёт по лабораторной работе №2	3	2	0	6
3. Отчёт по лабораторной работе №3	3	2	0	6
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. РГР, задания 1-4	5	4	0	20
Модуль 2. Решение систем нелинейных уравнений. Приближение функций				
Текущий контроль			**0**	**22**
1. Отчёт по лабораторной работе №4	14	1	0	14
2. Отчёт по лабораторной работе №5	4	2	0	8
Рубежный контроль			**0**	**28**
1. РГР, задания 5-11	4	7	0	28
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических занятий			0	-10
Поощрительные баллы			0	10
Итоговый контроль				
1. Зачет				110

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки *01.03.01 Математика*

курс **4**, семестр **VIII**

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Численные методы решения задач УМФ				
Текущий контроль			**0**	**30**
1. Отчёт по лабораторной работе №6	3	6	0	18
2. Отчёт по лабораторной работе №7	6	1	0	6
3. Отчёт по лабораторной работе №8	6	1	0	6
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. РГР, задания 13-14	10	2	0	20
Модуль 2. Численные методы решения для ОДУ				
Текущий контроль			**0**	**10**
1. Отчёт по лабораторной работе №9	10	1	0	10
Рубежный контроль			**0**	**10**
1. РГР, задания 12	10	1	0	10
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических занятий			0	-10
			0	10
Итоговый контроль				
1. Экзамен				30
Поощрительные баллы				10
				110

Приложение 2

Экзаменационные билеты

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №1
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса и его связь с тре-угольникомLU – разложением матрицы на множители (теорема о LU – факторизации). Метод Гаусса с выбором главного элемента.
2. Многошаговые методы решения задачи Коши (общая характеристика методов, явные и неявные методы). Методы Адамса (явные и неявные). Погрешность аппроксимации m-шаговых методов Адамса (получить условия, выделяющие m-шаговые схемы Адамса p-го порядка аппроксимации и наивысшего порядка аппроксимации явных и неявных методов); примеры многошаговых разностных методов Адамса.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/
Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №2
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Итерационное уточнение приближенного решения СЛАУ, полученного прямым методом, основанном на LU-факторизации матрицы системы.
2. Одношаговые методы решения задачи Коши: однопараметри-ческое семейство двухэтапных схем Рунге-Кутта 2-го порядка аппро-ксимации (исследовать погрешность аппроксимации и получить условие, выделяющее схемы 2-го порядка аппроксимации). Схемы предиктор-корректор и 4-го порядка аппроксимации.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/
Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**Экзаменационный билет №3
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)**

1. Итерационный процесс уточнения приближения к обратной матрице.

2. Формулы разностного дифференцирования произведения, суммирования по частям. Разностные формулы Грина.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**Экзаменационный билет №4
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)**

1. Метод квадратного корня решения СЛАУ с эрмитовой матрицей.

2. Неявный одношаговый метод Эйлера численного решения задачи Коши. Неявный метод Эйлера-Коши с итерациями (симметричная неявная схема трапеций; исследовать погрешность аппроксимации и точность схемы, а также сходимость итерационного метода).

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №5
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Устойчивость решения СЛАУ. Обусловленность СЛАУ; число обусловленности невырожденного оператора $A \in L(X \to X)$ (X – линейное пространство конечной размерности) и его основные свойства; примеры.
2. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и ее численное решение явным одношаговым методом Эйлера (исследовать порядок аппроксимации схемы Эйлера, точность схемы).

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №6
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Теорема о «неподвижной точке» общего итерационного процесса $x^{k+1}=x^k+H^{(k)}(f-Ax^k)$, $k=0,1,...$ решения операторного уравнения $Ax=f$, $H^{(k)}$, $A \in L(X \to X)$, X- линейное пространство конечной размерности.

2. Лемма о сходимости минимизирующей последовательности функционала энергии..

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №7
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Метод последовательных приближений решения операторного уравнения второго рода

$x=Sx+\psi$, $S:X\rightarrow X$, $\psi\in X$, (*)

X-линейное пространство конечной размерности. Теорема о существовании решения уравнения (*); достаточные и необходимые и достаточные условия сходимости метода последовательных приближений; оценки погрешности приближения. Конкретизация условий сходимости при решении СЛАУ.

2. Исследование устойчивости по начальному данному разностных схем для уравнения параболического типа с переменными коэффициентами

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №8
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Фундаментальная теорема А.А.Самарского о достаточных условиях сходимости общих неявных стационарных процессов простой итерации с итерационным параметром решения операторного уравнения Ax=f.

2. Конечные и разделенные разности и их основные свойства.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №9
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Явный метод простой итерации с итерационным параметром. Метод Якоби решения СЛАУ (достаточные условия сходимости).

2. Исследование устойчивости по начальному данному и правой части разностных схем для уравнения параболического типа с переменными коэффициентами.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №10
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Теорема А.А.Самарского о скорости сходимости общего неявного стационарного метода простой итерации с итерационным параметром при решении операторных уравнений $A x = f$.   .

2. Оценки погрешности интерполяции.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №11
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Оптимизация скорости сходимости итерационных процессов. Итерационные процессы с эквивалентными по энергии операторами решения операторных уравнений А х =f . Оптимальный процесс простых итераций. Оценка скорости сходимости и числа итераций.

2. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона на неравномерной сетке узлов, особенности их построения и применения. Интерполирование на равномерной сетке узлов (в начале, конце и «середине» таблицы)..

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №12
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Итерационные процессы вариационного типа решения линейных операторных уравнений А х=f . Метод минимальных невязок, оценки скорости сходимости.

2.Теорема Валле-Пуссена.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №13
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Итерационные процессы вариационного типа решения линейных операторных ураввнений A x =f . Метод скорейшего спуска, оценки скорости сходимости.
2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса, свойства коэффициентов формул. Численная устойчивость квадратурных формул. Простейшие из квадратурных формул Ньютона-Котеса. Составные квадратурные формулы.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №14
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Треугольные итерационные процессы. Метод Гаусса-Зейделя решения СЛАУ. Достаточное условие сходимости (применение фундаментальной теоремы А.А.Самарского о достаточных условиях сходимости).

2.Задача наилучшего приближения в линейном пространстве. Теорема существования.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №15
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Треугольные итерационные процессы. Метод Гаусса-Зейделя решения СЛАУ с доминирующей главной диагональю. Оценки скорости сходимости.
2. Задача наилучшего равномерного приближения непрерывных функций с помощью обобщенных и алгебраических многочленов заданной степени. Теорема Э.Бореля. Теорема единственности.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №16
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Треугольные итерационные процессы. Метод последовательной верхней релаксации (SOR). Достаточное условие сходимости.

2.Теорема о единственности элемента наилучшего приближения в строго нормированном пространстве. Примеры строго нормированных пространств.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №17
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Метод последовательных приближений доказательства существования, единственности и приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Принцип сжатых отображений. Оценки скорости сходимости приближений. Сформулировать также следствие общей теории о сходимости итераций на случай системы n уравнений относительно числовых переменных $x_1,..., x_n$:

$x_k = \varphi_k (x_1, x_2,...,x_n)$, k=1,2,...n;

геометрическая интерпретация метода на случай скалярного уравнения $x=\varphi(x)$.

2. Приближение функций сплайнами. Экстремальное свойство кубического интерполяционного сплайна.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/
Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №18
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Дифференцируемость нелинейного оператора в смысле Фреше. Метод Ньютона решения нелинейных функциональных уравнений. Теорема о скорости сходимости. Модифицированный процесс Ньютона-Канторовича. Геометрическая интерпретация метода Ньютона на случай скалярного уравнения $f(x)=0$.

2. Приближение функций сплайнами. Задача кусочно-кубической интерполяции функций. Построение, существование и единственность кубического интерполяционного сплайна.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №19
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве. Критерий в форме ортогональности для характеристики элемента наилучшего приближения в подпространстве гильбертова пространства.
2. Разностные схемы для уравнения параболического типа с переменными коэффициентами, имеющие аппроксимацию $O(h^2+\varepsilon)$ (исследовать погрешность аппроксимации схемы). Разрешимость сеточных задач и их численное решение.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №20
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве. Построение элемента наилучшего приближения в конечномерном подпространстве. Теорема А.Теплера.
2. Разностные аналоги теорем вложения (одномерный случай).

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №21
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача наилучшего среднеквадратичного по весу приближения функций, заданных на отрезке, и его конструктивное определение. Примеры.
2. Лемма о решении линейных операторных уравнений с положительным (вообще говоря неограниченным) оператором в гильбертовом пространстве. Теорема о функционале энергии.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №22
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача наилучшего среднеквадратичного по весу приближения функций, заданных на сетке, и его конструктивное определение.
2. Разностная схема для уравнения гиперболического типа. Погрешность аппроксимации, численное решение сеточных уравнений..

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №23
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Метод квадратного корня решения СЛАУ с эрмитовой матрицей.

2.Теорема о минимизирующей последовательности и ее сходимости в классическом методе Ритца.

.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №24
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Теорема П.Л.Чебышева об альтернансе (достаточность) и ее применение при построении наилучшего равномерного приближения функции $f(x)\in C[a,b]$ в подпространстве $H_n(P_n)$ многочленов степени не выше n. Многочлены Чебышева и их свойства. Применение многочленов Чебышева.

2.Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа второго порядка дивергентного вида с переменными коэффициентами: построение разностной схемы, обладающей вторым порядком аппроксимации (исследовать погрешность аппроксимации); решение сеточных уравнений.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/
Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №25
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача интерполирования функций. Теорема о существовании и единственности обобщенного и алгебраического полинома заданной степени и его определение.
2. Метод прогонки решения трехточечных разностных уравнений, его осуществимость и устойчивость..

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №26
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача численного интегрирования. Общие понятия. Квадратурные формулы интерполяционного типа; теорема о степени точности; априорные оценки погрешности.
2. Формулы разностного дифференцирования, суммирования по частям. Разностные формулы Грина.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №27
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Апостериорная оценка погрешности численного интегрирования. Метод Рунге. Автоматический выбор шага интегрирования.
2. Многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля, и их свойства.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №28
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности. Теорема о существовании и единственности.
2. Классический метод Ритца приближенного решения оператор-ного уравнения (построение минимизирующей последовательности для функционала энергии). Теорема о минимуме функционала энергии в конечномерном подпространстве $H_n \subset D(A)$; построение приближенного решения $u_*^n \in H_n$ по Ритцу.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №29
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Основные свойства коэффициентов квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности. Квадратурные формулы Дарбу-Кристофеля.
2. Исследование метода сеток задачи Дирихле для обыкновенного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами дивергентного вида: построение разностных схем, обладающих вторым порядком аппроксимации, исследование погрешности аппроксимации; решение сеточных уравнений.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/
Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №30
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Оценка погрешности квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности, отвечающие классическим весам (общая характеристика и применение).
2. Исследование метода сеток задачи Дирихле для обыкновен-ного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами дивергентного вида: разрешимость сеточной задачи, обладающей вторым порядком аппроксимации; устойчивость и сходимость разностной схемы в различных сеточных нормах.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/
Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №31
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Необходимое и достаточное условие выполнения неравенства $V(M)=1$, где $V(M)$ - число обусловленности невырожденного оператора $M \in L(X \to X)$, X - унитарное пространство конечной размерности.
2. Энергетическое пространство положительно-определенного оператора. Теорема о функционале энергии в энергетическом пространстве H_A . Классическое и обобщенное решения операторного уравнения $Au=f$ и его существование. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №32
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача наилучшего приближения в линейном пространстве. Теорема существования.
2. Метод Ритца в энергетическом пространстве H_A . Теорема о минимизирующей последовательности и ее сходимости в энергетическом пространстве.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №33
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Метод квадратного корня решения СЛАУ с эрмитовой матрицей.
2. Применение энергетического метода к решению задачи Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа дивергентного вида с переменными коэффициентами.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №34
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача интерполирования функций. Теорема о существовании и единственности обобщенного и алгебраического полинома заданной степени и его определение.
2. Разностные методы решения задач для уравнения математической физики. Основные понятия метода сеток: сетки, сеточные функции; пространство сеточных функций; сеточные нормы; аппроксимации простейших дифференциальных операторов разностными; погрешность аппроксимации и ее порядок (локальная и на сетке). Разностный принцип максимума для трехточечных разностных уравнений.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №35
по курсу «Численные методы»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача численного интегрирования. Общие понятия. Квадратурные формулы интерполяционного типа, теорема о степени точности; априорные оценки погрешности.
2. Разностные методы решения задач для УМФ. Основные понятия метода сеток: разностная схема, порядок аппроксимации разностной схемы, сходимость, точность, корректность разностной схемы; связь аппроксимации и устойчивости разностных схем со сходимостью..

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

Приложение 3

Варианты заданий для РГР

1) Рассмотрите СЛАУ, приведенную к виду, удобному для итераций по методу последовательных приближений:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3x_1 - 0.1x_2 + N, \\ x_2 = 0.2x_1 - 0.4x_2 + 0.01x_3 - 2, \\ x_3 = \qquad 0.2 \cdot N \cdot x_2 + 0.1x_3 + 5, \end{cases}$$

где N – порядковый номер по списку. Запишите расчетные формулы. Найдите норму матрицы системы и проверьте условие сходимости метода последовательных приближений для данной СЛАУ.

2) Рассмотрите вопрос о применении метода Якоби к решению СЛАУ вида

$$\begin{cases} 9x_1 + 2/N \cdot x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + Nx_3 = -6, \\ x_1 + Nx_2 + 9x_3 = -3, \end{cases}$$

где N – порядковый номер по списку. Запишите расчетные формулы.

3) Рассмотрите вопрос о применении метода Гаусса-Зейделя к решению СЛАУ вида

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5N, \\ -2Nx_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6, \\ -2x_2 + 4x_3 = -3/N, \end{cases}$$

где N – порядковый номер по списку. Запишите расчетные формулы метода Гаусса-Зейделя к решению СЛАУ.

4) Обоснуйте возможность решения СЛАУ вида

$$Ax = f, \quad A = \begin{pmatrix} 3N & 1 & 0 \\ 1 & 2N & 0 \\ 0 & 0 & 2N \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

методом Ричардсона с итерационным параметром $\tau > 0$.ЗдесьN – порядковый номер по списку.

Запишите расчетные формулы метода. Найдите число обусловленности матрицы A.

5) Найдите конечные разности функции $y = f(x) = x^3$ с шагом $h = 1$:

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y .$$

6) Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений $y_i = f(x_i)$:

i	0	1	2	3	4
x_i	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	4	5	5.5	5.7	5.8

Вычислите значения функции в точке $x = 2.3$с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

7) Для функции $f(x) = \sin \pi N x$ на отрезке $[0, 2]$ постройте наилучший интерполяционный многочлен 3-го порядка. Постройте графики многочлена и данной функции в одной системе координат.

8) Постройте кубический сплайн для функции $f(x)=\sin(\pi x\cdot N)$ на отрезке $[0,2]$, где N – порядковый номер по списку, используя разбиение отрезка на $n=10$ частей. Найдите значение в точке $x=0.48$.

9) Найдите параметры показательной функции $f(x)=ae^{bx}$ по заданной таблице значений $(x_k, f(x_k))$, $k=1,2,\dots,n$.

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_k)$	1	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2	2.1	2.5	3

Приведите график функции. Покажите, что результатом является аппроксимирующая функция

$$y=0{,}951393e^{0.108926x}.$$

10) Вычислите приближенно производную второго порядка с помощью формулы

$$y_{\bar{x}x}(x)=\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}=f^h(x)+O(h^2)$$

и сравните с точными значениями второй производной функции $y=f(x)=\sin(\pi xN)$ в точках отрезка [0,1] с шагами $h=0.2$ и $h=0.1$. Проанализируйте результаты в результате уменьшения шага в два раза (во сколько раз уменьшилась ошибка?)

11) Вычислить интеграл

$$J=\int_1^2 \frac{N}{x}dx$$

по формулам трапеций, Симпсона, Ньютона-Котеса:

$$\int_c^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_N)}{2}+\sum_{i=1}^{N-1}f(x_i)\right],\ h=\frac{b-a}{N},\ N=10;$$

$$\int_c^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{2m-2}\left(f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})\right),\quad N=2m;$$

$$\int_c^b f(x)dx \cong \frac{5h}{288}\left[19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)\right].$$

Здесь N – порядковый номер по списку. Найдите точное значение интеграла J и относительные погрешности $\delta_{\text{тр.}}$, $\delta_{\text{Симп.}}$ и $\delta_{\text{Н.Котеса}}$.

12) Найдите приближенное методом Эйлера на отрезке [1,2] задачи Коши

$$\frac{du}{dt}=\frac{1+u^2}{2t},\qquad u(1)=0$$

(точное решение задачи $u(t)=\operatorname{tg}(\ln\sqrt{t})$).

Расчеты проводить с шагом $\tau=0.1$.

13) Для начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\cos^2 x+0{,}1\cdot N)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<1,\ 0<t\le T=1,$$

$$u(x,0)=1-x,\quad u(0,t)=\cos t,\ u(1,t)=0,$$

где N – порядковый номер по списку, постройте устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ (где h и τ – шаги пространственной и временной сеток).

14). Для краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+xy^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\quad (x,y)\in(0,1)\times(0,1),$$

$$u(x,y)=\mu(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma,$$

постройте устойчивую разностную схему второго порядка аппроксимации.

Приложение 4

Варианты заданий для лабораторных работ

Лабораторная работа № 1

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Краткая теория. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно разделить на две группы: 1) прямые (точные); 2) итерационные (методы последовательных приближений).

С помощью точных методов, проделав конечное число операций, можно получить точные значения неизвестных. При этом предполагается, что коэффициенты и правые части системы известны точно, а все вычисления проводятся без округлений. Примером прямого метода является метод Гаусса.

Пусть задана СЛАУ

$$Ax = f, \qquad (1)$$

где A– вещественная квадратная матрица порядка n, а f– заданный и x– искомый векторы. Будем предполагать, что определитель матрицы A отличен от нуля. Тогда для каждого вектора f система (1) имеет единственное решение.

Или можно записать систему (1) в развернутом виде

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= f_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

Метод Гаусса решения системы (2) состоит в последовательном исключении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из этой системы (курс алгебры). После исключения неизвестных система (2) преобразуется в систему, матрица которой содержит нули всюду ниже главной диагонали. Получение такой системы называется прямой ход метода Гаусса. Обратный ход заключается в нахождении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из полученной системы.

Может оказаться, что система $Ax = f$ имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы Aравен нулю. Кроме того, заранее неизвестно, все ли угловые миноры матицы Aотличны от нуля. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента. Основная идея состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшем по модулю. Различают метод Гаусса с выбором главного элемента по строке. Он эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге проводится соответствующая перенумерация переменных.Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация строк. Иногда применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент среди всех элементов матрицы системы.

Нахождение матрицы, обратной матрицы A, эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E, \qquad (3)$$

где E – единичная матрица и X – искомая квадратная матрица. Пусть $A = [a_{ij}]$, $X = [x_{ij}]$. Уравнение (3) можно записать в виде системы n^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\ldots,n, \qquad (4)$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Далее, можно заметить, что система (4) распадается на n независимых систем уравнений с одной и той же матрицей *А*, но с различными правыми частями. Эти системы имеют вид

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \qquad j = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

где $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})^T$, у вектора $\delta^{(j)}$ равна единице *j*-я компонента и равны нулю остальные компоненты.

<u>Указания и требования к выполнению лабораторной работы.</u> 1) Требуется решить систему линейных уравнений $Ax = f$ с выбором главного элемента по строкам или столбцам:

$$\begin{aligned}
&18x_1 + 3.9x_2 + 1.6x_3 + n/3 \cdot x_4 = -3 \cdot \log_{10}(n + 2.4),\\
&3.9x_1 + 11n \cdot x_2 + 2.9x_3 - 2.1x_4 = \lg n + n,\\
&1.6x_1 + 2.9x_2 + (1 - 9.3n) \cdot x_3 - 3x_4 = (2n - 1) \cdot \lg n,\\
&n/3 \cdot x_1 - 2.1x_2 - 3x_3 - 13.3x_4 = 6 - \lg(n/2),
\end{aligned}$$

где n – порядковый номер по списку.

2) Вычислить вектор невязки $r = A\tilde{x} - f$, где $\tilde{x}$ – полученное решение.

3) Вычислить определитель матрицы A используя метод Гаусса.

4) Найти обратную матрицу A^{-1} используя метод Гаусса.

5) Сделать проверку, умножить матрицу A на полученную матрицу A^{-1}.

6) Оформить отчет. В отчете должна быть приведена постановка задачи, приведена краткая теория методов, приведены результатов расчетов.

<u>Литература</u>

6. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики.* – М.: «Наука», 1970.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – М.: «Наука», 1989.

<u>Лабораторная работа №2</u>

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения СЛАУ.

5) Одним из точных методов: метод квадратного корня (а), схема Холецкого (б), или метод ортогонализации (в) решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = b$$

вида

$$\begin{aligned}
&18x_1 + 3.9x_2 + 1.6x_3 + n/3 \cdot x_4 = -3 \cdot \log_{10}(n + 2.4),\\
&3.9x_1 + 11n \cdot x_2 + 2.9x_3 - 2.1x_4 = \lg n + n,\\
&1.6x_1 + 2.9x_2 + (1 - 9.3n) \cdot x_3 - 3x_4 = (2n - 1) \cdot \lg n,\\
&n/3 \cdot x_1 - 2.1x_2 - 3x_3 - 13.3x_4 = 6 - \lg(n/2),
\end{aligned}$$

где n – порядковый номер по списку.

6) Вычислить число обусловленности матрицы системы $M_A = \| A \|_* \cdot \| A^{-1} \|_*$.

<u>Указания и требования.</u> Выбрать прямой метод решения СЛАУ по следующему принципу: все те, у кого номер варианта N – число нечетное используют для пункта 1) метод квадратного корня и метод ортогонализации, все остальные (номер варианта число N – число четное) для решения СЛАУ используют схему Халецкого и метод ортогонализации. В качестве векторной нормы $\|\cdot\|_*$ взять следующие наиболее употребительные нормы – $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_\infty$. При вычислении числа обусловленности M_A взять в качестве матричной нормы – $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ или $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, где n – размерность матрицы A. Выдать также на печать:

по методу квадратного корня матрицы S, D и вектор y,

для метода Халецкого – матрицы B, C и вектор y,

для метода ортогонализации – сама система ортонормированных векторов.

Оформить отчет.

<u>*Литература*</u>

8. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие.* – СПб.: Издательство "Лань". 2007.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* М.: «Наука». 1989.
10. Лубышев Ф.В. *Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в конечномерных пространствах: Учебное пособие. Часть I. Элементы общей теории и алгоритмы.* – Уфа: РИЦ БашГУ. 2009.
11. Амосов А.А, Дубинский Ю.А, Копченова Н.В. *Вычислительные методы: Учебное пособие.* – СПб.: Издательство "Лань". 2014.

<u>Лабораторная работа № 3</u>

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы.

1) Методом простой итераций с параметром (в качестве параметра взять $\tau = \dfrac{2}{\|A\|_*}$, обосновать выбор параметра) (а), методом Якоби (б), методом минимальных невязок (в), методом Гаусса-Зейделя (г), методом верхней релаксации (д) или методом скорейшего спуска (ж) (см. лекции), с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, решить систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

взяв в качестве начального приближения целую часть от решения $\tilde{x}$, <u>полученного прямым методом решения (см. лабораторная работа №2).</u> Здесь (1) имеет следующий вид:

$$\frac{15.3}{n}x_1 + 1.6x_2 + \frac{n}{1.1}x_3 + 3.9\cdot x_4 = 5\cdot\sin\left(\frac{2}{3}n\right),$$

$$4.6x_1 + 0.47n\cdot x_2 - 2.4x_3 - 0.6x_4 = n\cdot\cos\left(\frac{n}{2.3}\right)$$

$$-1.8x_1 + 3.8x_2 + (4.8+n)\cdot x_3 + 1.9x_4 = 1.2\sin(n-4.1),$$

$$-6.1x_1 + 2.1x_2 + \frac{3}{n}x_3 + 2.7x_4 = \sin\left(\frac{n}{2}\right) + \cos n,$$

где n – порядковый номер по списку.

2) Вычислить число обусловленности матрицы системы $M_A = \|A\|_* \cdot \|A^{-1}\|_*$.

Указания и требования. Итерационный метод выбирается следующим образом: первый вариант выбирает (а), второй вариант выбирает (б), третий вариант, соответственно, (в), четвертый – (г), пятый – (д), шестой – (ж), седьмой – (а) и т.д. Взять следующий критерий останова итераций – $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_* < \varepsilon$. В качестве векторной нормы $\| \cdot \|_*$ взять следующие наиболее употребительные нормы – $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ $\| \cdot \|_\infty$. При вычислении параметра в методе простых итераций и числа обусловленности M_A взять в качестве матричной нормы – $\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$ или $\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$, где n – размерность матрицы A. Оформить отчет.

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие.* – СПб.: Издательство "Лань". 2007.

12. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* М.: «Наука». 1989.

13. Лубышев Ф.В. *Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в конечномерных пространствах: Учебное пособие. Часть I. Элементы общей теории и алгоритмы.* – Уфа: РИЦ БашГУ. 2009.

14. Амосов А.А, Дубинский Ю.А, Копченова Н.В. *Вычислительные методы: Учебное пособие.* – СПб.: Издательство "Лань". 2014.

Лабораторная работа №4
Методы решения систем нелинейных уравнений

Постановка задачи. а) Методом простых итераций (метод последовательных приближений), б) методом Зейделя для нелинейных систем, в) методом скорейшего спуска (метод градиента); г) методом Ньютона, с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ решить систему нелинейных уравнений:

$$F(x) = 0, \qquad (1)$$

где

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x,y,z,t) = z \cdot \sin\left(\dfrac{t}{2.1} \cdot N\right) + \cos\left((x + 0.1y)/N\right), \\ f_2(x,y,z,t) = \cos(t \cdot x - 1/3) + \sin\left((0.66z - y) \cdot N/9\right), \\ f_3(x,y,z,t) = -y^2 t \big/ (0.13 \cdot N) - (2z + x)/N, \\ f_4(x,y,z,t) = z - 4.3 \cdot x \cdot y - \cos\left((z - t) \cdot N/3\right). \end{cases}$$

Конкретный метод определяется преподавателем. Начальное приближение найти графически в области $|x| < 5$, например, используя пакет Maple или из других соображений.

Указания и требования. В качестве промежуточных результатов в методе Ньютона выдать на печать матрицу, обратную к матрице Якоби, в точке корня. В методе скорейшего спуска – транспонированную матрицу Якоби в точке корня. Для метода итераций проверить выполнение достаточных условий сходимости. Для контроля вычислений посчитать также невязки. Оформить отчет.

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики.* М.: «Госиздательство физ.-мат. литературы». 1960.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. *Вычислительные методы.*Том 1. М.: «Наука», 1976.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. М.: «Наука». 1987.
4. Срочко В.А. *Численные методы.* Курс лекций: учебное пособие.– СПб.: Изд-во «Лань», 2017.
5. Лекции доцента Манаповой А.Р.

Лабораторная работа № 5

Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц. Приближение функций.

Постановка задач.

1) Методом Леверье или методом развертывания векового определителя (см. матрицу A слева); либо методом Данилевского или методом вращения Якоби (см. матрицу A справа) найти характеристическое уравнение матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} -0.2N & -0.63 & 0.5 \\ 1/(6N) & N+3 & 16.9 \\ 2.6 & -9.4 & -11/N \end{pmatrix} \quad ; \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1{,}7 & 1{,}6 & 5{,}5 \\ 1{,}7 & 1 & 2 & 4{,}5 \\ 1{,}6 & 2 & 3 & 1{,}5 \\ 5{,}5 & 4{,}5 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Индивидуальные задания к п. 1):

а) Найти максимальное собственное число;
б) Найти минимальное собственное число;
в) Найти спектр;
г) Решить полную проблему собственных чисел (найти все собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы A).
(метод и индивидуальное задание определяются преподавателем)

2) Методом наименьших квадратов, используя ортогональные полиномы Чебышева, построить многочлен III степени, аппроксимирующий таблично заданную функцию:

x_i	$x_i = a_N + i \cdot h_x, \quad i = 0,1,...,7; \quad a_N = 0.1 + 0.2 \cdot N; \quad h_x = 0.1$							
y_i	0.6129	0.7451	0.67+N/26	0.8479	0.9536	1.1513	2.11-sin(N/17)	1.3517
i	0	1	2	3	4	5	6	7

где N– номер варианта. Вычислить значения функции на более мелкой сетке. Построить график восполненной функции.

Контрольные результаты:

а) Проверить значения функции в точках $x_i + \dfrac{h}{4}$.

б) Выписать разложение через полиномы Чебышева.

в) Вычислить среднеквадратичное отклонение: $S_{sred} = \sqrt{\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(y_i - \tilde{y}_i)^2}$

3) Оформить отчет.

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. 5-е изд., стер.* / Под ред. Б.П. Демидовича. – СПб.: Издательство "Лань", 2010.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие. 6-е изд., стер.* – СПб.: Издательство "Лань". 2007.
3. Пирумов У.Г. *Численные методы: теория и практика: Учебное пособие.5-е изд., перераб. и доп.* – М.: Издательство "Юрайт" 2012.
4. Срочко В.А. *Численные методы.* Курс лекций: учебное пособие.– СПб.: Изд-во «Лань», 2017.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

Метод Ритца решения граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

Метод Ритца или энергетический метод дает возможность найти приближенное решение граничной задачи в виде суммы функций.

Постановка задачи. Требуется найти решение следующего уравнения

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a,b), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(a) = \mu_1, \qquad u(b) = \mu_2, \tag{2}$$

где $k(x) \geq k_0 > 0$, $k(x) \in C^1[a,b]$, $q(x) \geq 0$, $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат классу $C[a,b]$.

Метод решения. Рассмотрим следующий функционал

$$J(u) = \int_a^b \left[k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2 - 2f(x)u \right] dx, \tag{3}$$

где $u(x)$ принадлежит классу допустимых функций, то есть функций, удовлетворяющих двум условиям:

1) эти функции непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$;

2) они удовлетворяют граничным условиям (2).

Теорема. *Если функция $u_*(x)$ доставляет минимум функционалу $J(u)$ среди всех допустимых функций, то она является решением граничной задачи (1), (2).*

Таким образом, задачу вычисления решения $u(x)$ граничной задачи (1), (2) можно заменить задачей отыскания минимума функционала (3) в классе непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, принимающих заданные значения $u(a) = \mu_1$ и $u(b) = \mu_2$ на концах отрезка.

В методе Ритца решение ищется в виде

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{4}$$

здесь c_k – численные параметры, φ_k – система некоторых известных функций. Выбор этих функций подчиняют условиям:

1) $\varphi_k(x) \in C^1[a,b]$, $k = 0,1,2,...$;

2) $\varphi_0(a) = \mu_1$, $\varphi_0(b) = \mu_2$, $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$, $k = 1,2,...$;

3) при любом конечном n функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ линейно независимы;

4) функции $\varphi_k(x)$ образуют в классе функций $C^1[a,b]$, удовлетворяющих условию (2), полную систему, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(x)$ из допустимого класса можно указать такое n и такие параметры $c_1, c_2, ..., c_n$, что имеет место неравенство

$$\left|u^{(i)}(x) - u_n^{(i)}(x)\right| < \varepsilon, \qquad i = 0,1, \;\; a \le x \le b,$$

где $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$.

Заметим, что при любом выборе параметров c_k функция $u_n(x) \in C^1[a,b]$, $u_n(a) = \mu_1$, $u_n(b) = \mu_2$. Подставив $u_n(x)$ в функционал $J(u)$, получим

$$J(u_n) = D_0 + 2\sum_{k=1}^{n} B_k c_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} c_i c_k, \tag{5}$$

где $D_0 = J(\varphi_0)$.

Параметры $c_1, c_2, ..., c_n$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_k} \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ik} c_i + B_k = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

В итоге имеем следующий алгоритм метода Ритца применительно к граничной задаче (1), (2):

1) выбираем систему функций $\{\varphi_k(x)\}$, подчиняя их выбор сформулированным выше условиям;
2) вычисляем коэффициенты матрицы и столбца СЛАУ $Ac = B$;
3) решаем полученную СЛАУ и выписываем ее решение $c_1, c_2, ..., c_n$;
4) значение параметров $c_1, c_2, ..., c_n$ подставляем в формулу (4) и полученную функцию $u_n(x)$ принимаем за приближенное решение к искомому решению $u(x)$ граничной задачи (1), (2).

Указания и требования. Систему $\{\varphi_k\}$ выбрать следующим образом:

1) φ_0 – линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям (2) (выписать уравнение самостоятельно); либо $\varphi_0(x) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\sin\dfrac{\pi(x-a)}{2(b-a)}$;

2) $\varphi_k = (b-x)(x-a)^k$, $k = \overline{1,n}$, либо $\varphi_k = (b-x)^k(x-a)$, $k = \overline{1,n}$, либо $\varphi_k = \sin k\pi\dfrac{x-a}{b-a}$, $k = \overline{1,n}$.

Отрезок $[a,b]$ разбить на 5 частей и выдать решение $u(x)$ в полученных точках. Выдать также на печать матрицу A, столбец b и решение системы $c_1, c_2, ..., c_n$.

3) Возникающие задачу численного решения СЛАУ решать методом Гаусса; задачи численного интегрирования решать по формулам левых, правых или центральных прямоугольников, трапеций и Симпсона (метод определяется преподавателем), с автоматическим выбором шага интегрирования, с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

4) Рассмотреть вопросы *о числе обусловленности матрицы* A и *о знакоопределенности матрицы* A (использовать критерий Сильвестра). Для этих вычислений можно пользоваться математическим пакетом *Maple*.

5) Конкретные функции взять из таблицы, а n положить 3 для нечетных вариантов и 4 для четных вариантов.

	a	b	μ_1	μ_2	$k(x)$	$q(x)$	$f(x)$
1.	0	$\frac{3}{2}-\frac{N}{25}$	$\frac{N}{2}-1$	0	$\sqrt{\frac{x}{5}+\frac{N}{3}}$	$\frac{x+4}{x^2+\frac{N}{3}}$	$\frac{2x}{N+1}$

2.	$\frac{3}{5}-\frac{N}{13}$	$2-\frac{N}{13}$	$\frac{15}{N+3}$	$-\frac{6N}{21}$	$\frac{4-0.1x}{x^2+\frac{N}{16}}$	$\frac{x+5}{x^2+0.9N}$	$\frac{N+x}{3.5}$
3.	0	1	0	0			

здесь N – номер варианта.

5) Оформить отчет. Также в отчете привести формулы вычисление элементов матрицы A и столбца b (получить самостоятельно или списать где-нибудь (с выводом, естественно)).

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. – Т.2. – М.: Наука, 1977.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.– М.: БИНОМ, 2004.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа

Постановка задачи. Пусть требуется найти $u(x,t)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$u(0,t) = \gamma_0(t), \qquad u(l,t) = \gamma_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \alpha(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \beta(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Здесь $f(x,t)$, $\gamma_0(t)$, $y_1(t)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $a(x,t)$ - заданные функции. Будем предполагать, что эти функции достаточно гладкие, причем $\gamma_0(0) = \alpha(0)$, $\gamma_1(0) = \beta(l)$. Будем также считать, что начально-краевая задача (1)-(3) имеет единственное, достаточно гладкое решение.

Метод решения. Пусть требуется найти решение дифференциальной задачи

$$Lu = f, \tag{4}$$

поставленной в некоторой области Ω с границей Γ.

Для решения задачи (4) по методу сеток в области $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ необходимо:

1) заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения, т.е. выбрать в этой области некоторое конечное множество точек (такое множество точек называется *сеткой*, а отдельные точки – *узлами* сетки; функцию, определенную в узлах сетки, будем называть сеточной функцией);
2) заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и начальных данных (построить разностную схему);
3) исследовать сходимость разностной схемы (установить аппроксимацию исходной задачи разностной схемой, проверить устойчивость разностной схемы).

Пусть u_h – точное решение задачи (4) в узлах сетки. Как правило, вычислить u_h не удается. Поэтому находят сеточную функцию $y_h \approx u_h$ как решение задачи

$$L_h y_h = f_h, \tag{5}$$

«близкой» к задаче (4). Задачу (5) называют разностной схемой.

Для задачи (1)-(3) в качестве сетки возьмем совокупность точек

$$\overline{\omega}_{\tau h}=\left\{(x_i,t_j):x_i=i\cdot h,\ t_j=j\cdot\tau;\ i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M};\ h=l/N,\ \tau=T/M\right\}.$$

Пользуясь заменой вторых производных разностными отношениями, из (1) получим разностное уравнение, относительно сеточной функции $y(x,t)$

$$\frac{y(x_i,t_{j-1})-2y(x_i,t_j)+y(x_i,t_{j+1})}{\tau^2}=a^2(x_i,t_j)\frac{y(x_{i-1},t_j)-2y(x_i,t_j)+y(x_{i+1},t_j)}{h^2}+ \\ +f(x_i,t_j),\qquad i=1,\ldots,N-1,\quad j=1,\ldots,M-1. \tag{6}$$

Из граничных условий (2) имеем

$$y_0^j=\gamma_0(t_j),\quad y_N^j=\gamma_1(t_j),\quad j=0,1,\ldots,M. \tag{7}$$

Решение y_i^{j+1} выражается явным образом через значения на предыдущих слоях

$$y_i^{j+1}=s_i^j y_{i+1}^j+2(1-s_i^j)\,y_i^j+s_i^j y_{i-1}^j-y_i^{j-1}+\tau^2 f(x_i,t_j), \\ i=1,2,\ldots,N-1,\quad j=1,2,\ldots,M-1, \\ y_i^j=y(x_i,t_j),\quad s_i^j=\frac{\tau^2}{h^2}a^2(x_i,t_j). \tag{8}$$

Следовательно, мы сможем найти y_i^{j+1} при $j=1,2,\ldots,M-1$ по (8), если будут известны y_i^0, y_i^1 при $i=1,2,\ldots,N-1$.

Для вычисления y_i^0 и y_i^1 следует использовать условия (3). Это можно сделать, например, следующим способом:

По формуле Тейлора имеем

$$u(x,t_1)=u(x,t_0)+\frac{\tau}{1!}\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2}+\frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x,\tilde{t}_1)}{\partial t^3},\quad t_0\le\tilde{t}_1\le t_1.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}=\frac{u(x,t_1)-u(x,t_0)}{\tau}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u(x,\tilde{t}_1)}{\partial t^3},\quad t_0\le\tilde{t}_1\le t_1. \tag{9}$$

Если $\alpha(x)$ имеет конечную вторую производную, то из (1) и (3) получим

$$\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2}=a^2(x,t_0)\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial x^2}+f(x,t_0)=a^2(x,t_0)\,\alpha''(x)+f(x,t_0).$$

Подставив это значение в (9), найдем

$$y_i^0=\alpha(x_i),\quad y_i^1=\alpha(x_i)+\tau\beta(x_i)+\frac{\tau^2}{2}\left[a^2(x_i,0)\,\alpha''(x_i)+f(x_i,0)\right],\quad i=1,2,\ldots,N-1.$$

Указания и требования. Построить разностную схему для следующей смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{2(\alpha^2-1)}{(x+\alpha t+1)^3},\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1,$$

$$u(0,t)=\frac{1}{\alpha t+1},\quad u(1,t)=\frac{1}{\alpha t+2},\quad 0\le t\le 1,$$

$$u(x,0)=\frac{1}{1+x},\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-\frac{\alpha}{(1+x)^2},\quad 0\le x\le 1,$$

здесь $\alpha=0{,}5+0{,}1N$, где N – номер варианта. Исследовать сходимость полученной разностной схемы (погрешность аппроксимации, устойчивость разностной схемы). Отрезок $[0,l]$ разбить на 10 частей и выдать полученное решение $y(x,t)$ на десяти слоях.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:«Наука». 1983.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.М.: «Наука». 1989.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, Т.2. М.: «Наука». 1977.

4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: «Наука». 1967.

Лабораторная работа №8

Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

Постановка задачи. Пусть требуется найти $u(x,t)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \gamma_0(t), \qquad u(l,t) = \gamma_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi(x) \qquad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Здесь $f(x,t)$, $\gamma_0(t)$, $y_1(t)$, $\psi(x)$, $a(x,t)$ – известные функции, причем $\psi(0) = \gamma_0(0)$, $\psi(l) = \gamma_1(0)$. Будем считать, что задача (1)-(3) имеет единственное, достаточно гладкое решение.

Метод решения. Для задачи (1)-(3) в качестве сетки возьмем совокупность точек

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \left\{(x_i, t_j): x_i = i \cdot h, t_j = j \cdot \tau; i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}; h = l / N, \tau = T / M\right\}.$$

Пользуясь заменой вторых производных разностными отношениями, из (1) можем получить, например, такое разностное уравнение, относительно сеточной функции $y(x,t)$

$$\frac{y(x_i,t_j) - y(x_i,t_{j-1})}{\tau} = a^2(x_i,t_j)\frac{y(x_{i-1},t_j) - 2y(x_i,t_j) + y(x_{i+1},t_j)}{h^2} + f(x_i,t_j), \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 1,2,\ldots,M, \tag{4}$$

из начально-краевых условий (2)-(3) имеем

$$y_0^j = \gamma_0(t_j), \quad y_N^j = \gamma_1(t_j), \quad j = 0,1,\ldots,M, \quad y_i^0 = \psi(x_i), \quad i = 1,\ldots,N-1. \tag{5}$$

Полученная разностная схема называется – *чисто неявной разностной схемой* для уравнения теплопроводности (схемой с опережением). Решение системы (4) находится по слоям начиная $j = 1$. Для нахождения y_i^j по известным y_i^{j-1} требуется решить систему уравнений

$$s_i^j y_{i-1}^j - (1 + 2s_i^j)\, y_i^j + s_i^j y_{i+1}^j = -\tau f(x_i,t_j) - y_i^{j-1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 1,2,\ldots,M, \quad y_i^j = y(x_i,t_j), \quad s_i^j = \frac{\tau}{h^2}a^2(x_i,t_j). \tag{6}$$

Эту систему можно решать методом прогонки, смотри [1], [2].

Указания и требования. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\left(x^2 - 2t\right), \qquad 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le 0.05,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \alpha t, \qquad 0 \le t \le 0.05,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

а) по *чисто неявной* разностной схеме, б) по *чисто явной* разностной схеме [1-2], взяв $h = 0.1$, $\tau = 0.01$; здесь $\alpha = 0.5 * N$, где N – номер варианта. Получаемую систему линейных алгебраических уравнений (с трехточечной матрицей) решать методом 1) *правой*, 2) *встречных*, 3) *левой* прогонок (определяется преподавателем) [3]. Исследовать сходимость полученной разностной схемы (погрешность аппроксимации, устойчивость разностной схемы).

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1983.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука. 1989.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С.Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978.

Лабораторная работа№9

Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи. Пусть требуется найти

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \dots, \quad u_m = u_m(t),$$

удовлетворяющие системе обыкновенных дифференциальных уравнений при $t > 0$ и начальному условию при $t = 0$:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = 1,2,..,m,$$

$$u_i(0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1,2,\dots,m.$$

при условии, что правая часть системы удовлетворяет

требованиям, обеспечивающим однозначную

разрешимость задачи.

Указания и требования. Методом Эйлера, методом Хойна (или Хьюна), методом Рунге-Кутты (третьего и четвертого порядка точности) найти решение на отрезке $t \in [0,1]$ следующей системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях с заданным шагом $h = 0.1$:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \sin(\alpha * u_1^2(t)) + t + u_2(t), & u_1(0) = 1, \\ u_2'(t) = t + u_1(t) - \alpha u_2^2(t) + 1, & u_2(0) = 0.5, \end{cases}$$

здесь $\alpha = 2 + 0.5N$, где N – номер варианта. Метод решения определяется преподавателем.

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Э.З.Шувалова Численные методы анализа. М.: Наука.1967.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука. 1987.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.