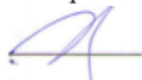


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:

на заседании кафедры
математического анализа
протокол № 9 от 17 апреля 2020 г.

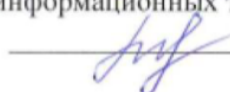
Зав. кафедрой



/ Х.К. Ишкин

Согласовано:

Председатель УМК факультета математики и
информационных технологий



/ Ефимов А.М.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Дисциплина Функциональный анализ

(наименование дисциплины)

обязательная часть

Программа бакалавриата

Направление подготовки (специальность)

01.03.01 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки

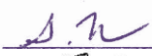
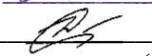
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление», «Преподавание математики и информатики»

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

бакалавр

(указывается квалификация)

<p>Разработчики (составители) <u>д.ф.-м.н., профессор</u> <u>к.ф.-м.н., доцент</u> (должность, ученая степень, ученое звание)</p>	<p> / <u>Гайсин А.М.</u>  / <u>Айткужина Н.Н.</u> (подпись, Фамилия И.О.)</p>
---	---

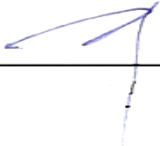
Для приема: 2020

Уфа - 2020 г.

Составитель / составители: профессор, д.ф.-м.н., Гайсин А.М., доцент кафедры матанализа,
к.ф.-м.н. Аиткужина Н.Н.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа
протокол № 7 от « 17 » апреля 2020 г.

Заведующий кафедрой


/ Ишкин Х.К.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании
кафедры _____

протокол № ____ от « ____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой

_____/_____/

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании
кафедры _____

протокол № ____ от « ____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой

_____/_____/

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании
кафедры _____

протокол № ____ от « ____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой

_____/_____/

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	
2. Цели и место дисциплины в структуре ООП ВО	
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	
4.3. Рейтинг-план дисциплины	
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	
Приложение №1: Содержание рабочей программы	
Приложение №2: Рейтинг-план дисциплины	

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знания	1. Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Знать классические постановки задач функционального анализа; методы функционального анализа для применения в смежных областях	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	
Умения	1. Уметь: - доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины,	ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов,	

		теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Уметь: -применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	3. Уметь: применять методы функционального анализа в научно-исследовательской работе	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	
Владения (навыки / опыт деятельности)	1. Владеть: навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Владеть навыками применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	

2. Цели и место дисциплины в структуре ООП ВО

Цели изучения дисциплины:

-ознакомить студентов с основами функционального анализа;
-подготовить их к самостоятельному изучению математической литературы, в которой используется аппарат функционального анализа.

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 3 курсе в 5-6 семестрах.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, комплексный анализ.

Приобретенные знания необходимы для последующего изучения таких дисциплин, как «Уравнения в частных производных», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Численные методы».

3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4. Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)				
		2 «не удовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Первый этап (уровень)	Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного	Фрагментарные представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам	Неполные представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического	Сформированные систематические представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к

	содержания	естественнонаучного содержания	естественнонаучного содержания	знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	дисциплинам естественнонаучного содержания
Второй этап (уровень)	Уметь: - доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины,	Фрагментарные представления о доказательствах утверждений и методах решения задач преподаваемой дисциплины	В целом успешное, но не систематическое использование основных утверждений и методов решения задач преподаваемой дисциплины	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование основных утверждений и методов решения задач преподаваемой дисциплины	Сформированное умение использовать основные утверждения и методы решения задач преподаваемой дисциплины
	Уметь: - применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	Фрагментарные представления о применении полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла	В целом успешное, но не систематическое использование полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла	Сформированное умение использовать полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла
Третий этап (уровень)	Владеть: навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	Фрагментарное использование фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной	В целом успешное, но не систематическое применение фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в	Успешное и систематическое применение навыков фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей

		деятельности	профессиональной деятельности	будущей профессиональной деятельности	профессиональной деятельности
--	--	--------------	----------------------------------	---	----------------------------------

ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)				
		2 «не удовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Первый этап (уровень)	Знать: классические постановки задач функционального анализа; методы функционального анализа для применения в смежных областях	Фрагментарные представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях	Неполные представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях	Сформированные систематические представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях
Второй этап (уровень)	Уметь: применять методы функционального анализа в научно-исследовательской работе	Фрагментарное использование методов функционального анализа в научно-исследовательской работе	В целом успешное, но не систематическое использование методов функционального анализа в научно-исследовательской работе	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование методов функционального	Сформированное умение использовать методы функционального анализа в научно-исследовательской работе

				анализа в научно-исследовательской работе	
Третий этап (уровень)	Владеть навыками применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	Фрагментарное использование основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	В целом успешное, но не систематическое применение основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	Успешное и систематическое применение навыков применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	Доклад на семинаре, экзамен
	Знать: классические постановки задач функционального анализа; методы функционального анализа для применения в смежных областях	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Доклад на семинаре, экзамен
2-й этап Умения	Уметь: - доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины,	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического	Контрольная работа, экзамен

	-применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественно-научного содержания	анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	Уметь: применять методы функционального анализа в научно-исследовательской работе	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Контрольная работа
3-й этап Владеть навыками	Владеть: навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории	Контрольная работа

		вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	Владеть навыками применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Контрольная работа

4.3 Рейтинг-план дисциплины

Представлен в Приложении 2.

Вопросы для подготовки к экзамену

V семестр

1. Системы множеств (полукольцо, кольцо)
2. Теорема о кольце, порожденном полукольцом.
3. Системы множеств (алгебра, σ -кольцо, σ -алгебра, δ -алгебра. Борелевские множества на прямой.
4. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное кольцо.
5. σ -аддитивная мера и ее свойства.
6. Определение внешней меры и ее свойства.
7. Меры на прямой.
8. Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.
9. Непрерывность внешней меры на измеримых подмножествах.
10. Лебеговское продолжение меры
11. Измеримые функции.
12. Сходимости по мере и почти всюду.
13. Определение интеграла Лебега для простых функций. Свойства. Определение интеграла Лебега.
14. Класс суммируемых функций
15. Предельный переход под знаком интеграла Лебега
16. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

17. Интеграл Стильеса
18. Теорема Радона – Никодима
19. Прямое произведение мер и теорема Фубини
20. Пространства L_1 , L_p ($p > 1$)

VI семестр

21. Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума;
22. Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа;
23. Полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.
24. Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства;
25. Сопряженное пространство, его полнота.
26. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала
27. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах
28. Линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности;
29. Обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе.
30. Компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма – Лиувилля)
31. Гильбертовы пространства: скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы
32. Неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение
33. Неравенства Гельдера и Минковского
34. Пространство $L_2(a,b)$
35. Общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы
36. Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию
37. Спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры

38. Линейные топологические пространства и обобщенные функции: полинормированные пространства; функционал Минковского

39. Нормируемость и метризуемость;

40. Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.

41. Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.

Образец экзаменационного билета

<p style="text-align: center;">МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА Экзаменационный билет № 1 по курсу «Функциональный анализ»</p> <p>1. Системы множеств (полукольцо, кольцо) (15 баллов) 2. Теорема Радона – Никодима (15 баллов)</p> <p>Зав. кафедрой Ишкин Х.К. / _____ /</p>

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Критерии оценки (в баллах):

- 25-30 баллов выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без

затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

*- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;*

*- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;*

*- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.*

Список тем для докладов:

1. Меры на прямой.
2. Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.
3. Непрерывность внешней меры на измеримых подмножествах.
4. Лебеговское продолжение меры
5. Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа;
6. Полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.
7. Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.
8. Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию
9. Нормированные пространства
10. Гильбертовы пространства

Критерии оценки (в баллах):

- 3 балла выставляется студенту за полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.
- 2 балла выставляется студенту в случае, если студент сделал полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий доклад, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.
- 1 балл выставляется студенту в случае, если студент сделал неполный доклад на семинаре на заданную тему и не ответил ни на один дополнительный вопрос.
- 0 баллов выставляется студенту, если им не был сделан доклад на заданную тему.

Задания для контрольной работы**Описание контрольной работы:**

В каждом семестре студенту представляется две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из четырех объемных заданий. Задача считается правильно решенной, если студентом приведено подробное и полное ее решение. Каждое задание оценивается в 3 балла. В случае, если студент не справляется с более 50% заданий по обеим контрольным, он не допускается к сдаче экзамена. У каждого студента есть возможность пересдать контрольную работу.

Пример варианта контрольной работы:**Контрольная работа №1 (5 семестр)****Типовой вариант**

1. Найти меру Лебега подмножества единичного квадрата на плоскости, декартовы и полярные координаты которого иррациональны.

Вычислить интеграл по мере Лебега функции:

2. $f(x) = e^{-[x]}$ по отрезку $[0, \infty)$
3. $f(x) = e^{-[x+1]}$ по отрезку $[0,10)$
4. Пусть множество E на прямой имеет Лебегову меру нуль, должно ли его замыкание иметь меру нуль?

Контрольная работа №2 (5 семестр)**Типовой вариант****Какие из нижеприведенных формул определяют метрику в X :**

1. $\rho(x, y) = \cos^2(x - y)$, $X = R^1$
2. $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \beta_k)$, $X = l^{\infty}$

Выяснить, сходится ли в метрическом пространстве заданная последовательность.**Если сходится, найти предел**

3. $X = C[0,1]$, $x_n = t^n$

4. $X = l^2$, $x_n = (1, \underbrace{0,0, \dots, 0}_{n}, \frac{1}{n}, 0, \dots)$

Контрольная работа №3 (6 семестр)

Типовой вариант

1. Доказать, что $l^p C l^q$ при $p < q$

Можно ли в $C^{(1)}[0, 1]$ ввести нормы следующим образом:

2. $\|x\| = \max|x'(t)|$ на отрезке $[0,1]$

3. $\|x\| = \max|x'(t)| + x(a)$

4. $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max|x'(t)|$

5. Доказать, что пространство $C[0, \pi]$ не является гильбертовым

Контрольная работа №4 (6 семестр)

Типовой вариант

Проверить являются ли данные функционалы линейными и непрерывными, если да, то найти их нормы.

1. $F(x) = \int_{-2}^2 (t^2 - 1)x(t)dt - x(0)$; $F: C[-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$

2. $F(x) = \int_{-2}^2 (t - 1) \left(t - \frac{3}{2}\right) tx(t)dt$; $F: L^3(-2; 2) \rightarrow \mathbb{R}$

3. $F(x) = \xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3$; $F: l^2 \rightarrow \mathbb{R}$

4. $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}$; $F: l^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Описание методики оценивания:

Критерии оценки (в баллах):

12 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;

9 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

6 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;

3 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно

Задание для РГР

В семестре студенты выполняют РГР

При каких λ применим принцип сжимающих отображений в пространствах $L^2(a, b)$ и $C[a, b]$ к уравнению Фредгольма 2-го рода

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + y(t)?$$

Найти точное решение уравнения. Найти номер итерации N , обеспечивающий точность 0,01 в метрике $C[a, b]$, когда за первое приближение берется $x_0(t) \equiv y(t)$. Заметим, что N определяется из неравенства

$$\frac{\alpha^{N-1}}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1) < 0,01,$$

где α - коэффициент сжатия.

Исходные данные для каждого варианта берутся из следующей таблицы

№№	$K(t, s)$	$y(t)$	a	b	λ	n
1.	$t^2 s$	$\cos 3t$	0	1	1	8
2.	$t^2 s$	$\cos 3t$	0	1	1	10
3.	ts	e^t	-1	1	0,5	10
4.	ts	e^t	0,5	1,5	0,5	10
5.	$t^2 s^2$	$\frac{\sin t}{t}$	0,3	1,2	0,6	9
6.	e^{t-s}	1	0,1	0,9	0,5	8
7.	e^{t-s}	t	0,1	0,8	0,5	7
8.	$\cos \pi(t - s)$	1	0	1	0,5	10
9.	$\cos t \sin s$	1	0	2	0,25	10
10.	$\sin t \cos s$	1	-0,5	0,5	0,25	5
11.	$e^{2t} \cos s$	$\sin t$	0	0,5	0,6	5
12.	$e^{2t} \sin s$	$\cos t$	0	0,5	0,4	10
13.	$e^t \cos s$	$2 \sin t$	0	0,9	0,5	8
14.	$e^t \sin s$	$2 \cos t$	0	0,8	0,5	8
15.	$t \sin s$	e^t	0,2	0,8	0,4	6
16.	$t \cos s$	e^{-t}	0,1	0,9	0,3	8
17.	$t^2 e^s$	t	-2	-1	2	6

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

Основная:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 7-е изд.

М.: Физматлит, 2012. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82563&sr=1

2. Башмаков Р.А., Махота А.А., Юлмухаметов Р.С. Мера и интеграл. Курс лекций /Изд-во БашГУ/- Уфа, 2012.-58с. <https://elib.bashedu.ru/dl/corp/BashmakovMera i IntegralKursLekcii.2012.pdf>

3. Гопенгауз И. Е. Высшая математика: Функциональный анализ: Учеб. Пособие. Изд.

МИСиС. 2008 <https://e.lanbook.com/book/116486>

4. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев - СПб: Лань, 2009 - 270, [1] с.

<https://e.lanbook.com/book/245>

5. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. — Сборник задач по функциональному анализу. СПб: Лань, 2012 <https://e.lanbook.com/book/3175>

Дополнительная:

6. Башмаков Р.А., Аиткужина Н.Н., Махота А.А. Лабораторные работы по функциональному анализу. БашГУ, Уфа, 2017
https://elib.bashedu.ru/dl/local/Bashmakov_Aitkuzhina_Mahota_sost_Funkcionalnyj_analiz_mu_2017.pdf

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

А. Ресурсы «Интернет»

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elib.bashedu.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://www.biblioclub.ru
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети	http://e.lanbook.com

В. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.

2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Оборудование	Программное обеспечение
Аудитория № 501, № 530	Лекции	<p>№501: Учебная мебель, доска, персональный комп. и системный блок /Corei5-4460(3.2)/CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, ПрезентерLogitechWirelessPresenterR400 (210134000003592), проектор SonyVPL-DX270, экран ручной ViewScreenLotus 244x183 WLO-4304</p> <p>№530: Учебная мебель, доска</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.</p>
Аудитория № 517, №527	Лабораторные занятия	<p>№517: Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор.ДА32</p> <p>№527: Учебная мебель, доска</p>	<p>Ст1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.ндартные приложения Windows</p>
Аудитория № 517, №527	Групповые и индивидуальные консультации	<p>№517: Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор.ДА32</p> <p>№527: Учебная мебель, доска</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.</p>
Аудитория № 517, №527	учебная	<p>№517: Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от</p>

	аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации	смMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор.ДА32 №527: Учебная мебель, доска	17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.
Читальный зал №2 (физико-математический корпус)	Самостоятельная работа, выполнение РГР	Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 5 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.	1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины функциональный анализ на 5 семестр
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/360
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	73,7
лекций	36
практических/ семинарских	0
лабораторных	36
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,7
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	71,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	34,8

Форма(ы) контроля:

экзамен 5 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Введение: возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
2.	Системы множеств (полукольцо, кольцо)	1		1	4	1-3,6	(2), § 1, К.в. 1-2 №1-4, (7), II § 1	Проверка д/р, к/р, экз
3.	Теорема о кольце, порожденном полукольцом.	2		2	5,5	1,2,6	(2), § 1, К.в. 3-4 № 4-8	Проверка д/р, к/р, экз
4.	Системы множеств (алгебра, σ -кольцо, σ -алгебра, δ -алгебра. Борелевские множества на прямой.	2		2	8	1,2,6	(2), § 1 № 10-13	Проверка д/р, к/р, экз

5	Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное кольцо.	2		2	4	1,2,6	(2), § 2, К.в. 1-2, №1-3,8 (7), II, § 1	Проверка д/р, к/р, экз
6	σ -аддитивная мера и ее свойства.	2		2		1,2,6		Проверка д/р, к/р, экз
7	Определение внешней меры и ее свойства.	1		1	6	1,2,6	(2) § 2, №13-17	Проверка д/р, к/р, экз
8	Меры на прямой.	2		2	6	1,2,6	(2) § 2, №13-18	Проверка д/р, к/р, экз
9	Мера в R^n .	1		1	6	1,2,6	(4) V, § 1	Проверка д/р, к/р, экз
10	Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.	1		1		1,2,6		Проверка д/р, к/р, экз
11	Непрерывность внешней меры на измеримых подмножествах.	2		2	6	1,2,6	(3) § 4, К.в.1	Проверка д/р, к/р, экз
12	Лебеговское продолжение меры	2		2		1,2,6		Проверка д/р, к/р, экз
13	Измеримые функции.	2		2	6	1,2,6	(2) §4, № 1-5	Проверка д/р, к/р, экз
14	Сходимости по мере и почти всюду.	1		1	4	1,2,6	(2) § 4, №6-8 К.в. 2-3	Проверка д/р, к/р, экз
15	Определение интеграла Лебега для простых функций.	2		2	6	1,2,6	(2) § 5, К.в. 1-2, № 1,2	Проверка д/р, к/р, экз

	Свойства.Определение интеграла Лебега.							
16	Класс суммируемых функций	1		1	6	1,2,6	(2), § 5, № 3-6 (4), VII	Проверка д/р, к/р, экз
17	Предельный переход под знаком интеграла Лебега	2		2	4	1,6	(2), § 5, № 5	Проверка д/р, к/р, экз
18	Связь интеграла Лебега с интегралом Римана	1		1		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
19	Интеграл Стильеса	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
20	Теорема Радона – Никодима	1		1		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
21	Прямое произведение мер и теорема Фубини	2		2		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
22	Пространства L_1, L_p ($p>1$)	2		2		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
	Итого	36		36	71,5			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины функциональный анализ на 6 семестр
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/360
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	65,2
лекций	32
практических/ семинарских	0
лабораторных	32
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	71
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	43,8

Форма(ы) контроля:

экзамен 6 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	6 семестр							
1.	Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума;	2		2	6	1-6	(2) § 8, № 1-6, § 10, № 1-9	Проверка д/р, к/р, экз
2	Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа;	2		2	4	1-6	(2) § 11, К.в. 1-4, № 1-18	Проверка д/р, к/р, экз
3	Полнота и пополнение; теорема о	2		2	10	1-6	(2) § 13, К.В.1-3, № 1-4 § 16, № 1-9	Проверка д/р, к/р, экз, РГР

	стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.							
4	Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства;	1		1	6	1-6	(2) § 17, № 1-2, К.в. 1	Проверка д/р, к/р, экз
5	Сопряженное пространство, его полнота.	1		1	4	1-6	(2) § 16	Проверка д/р, к/р, экз
6	Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала	2		2	6	1-6	Самостоятельное изучение: Принцип равномерной ограниченности (8) гл.9, § 2	Проверка д/р, к/р, экз
7	Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах	1		1	4	1-6	(2) § 15, № 1-11	Проверка д/р, к/р, экз
8	Линейные операторы; норма оператора; сопряженный	2		2	6	1-6	(2) § 20,21	Проверка д/р, к/р, экз

	оператор; принцип равномерной ограниченности;							
9	Обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе.	1		1	4	1-6	(2) § 12, № 6-17	Проверка д/р, к/р, экз
10	Компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма – Лиувилля)	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
11	Гильбертовы пространства: скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
12	Неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз

	об изоморфизме, ортогональное дополнение							
13	Неравенства Гельдера и Минковского	1		1	10	1-6	Самостоятельное изучение унитарных операторов (7), гл. § 2	Проверка д/р, к/р, экз
14	Пространство $L_2(a,b)$	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
15	Общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
16	Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию	2		2	5	1-6	(2) § 6 (11) гл.3, § 1.1 Функционалы Минковского - самостоятельно	Проверка д/р, к/р, экз
17	Спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз

18	Линейные топологические пространства и обобщенные функции: полинормированные пространства; функционал Минковского	2		2	2	1-6	(2), § 17	Проверка д/р, к/р, экз
19	Нормируемость и метризуемость;	1		1	4	1-6	(11), гл. III § 3.2 – 3.4	Проверка д/р, к/р, экз
20	Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
21	Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.	2		2		2,6		Проверка д/р, к/р, экз
	РГР							
	Итого	32		32	71			
	Всего часов:	68		68	142,5			

4.3 Рейтинг-план дисциплины функциональный анализ

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление 01.03.01 Математика
курс 3, семестр 5

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Теория меры. Интеграл Лебега				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	5
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
2. Выступление с докладом	3	1	0	3
Модуль 2. Метрические пространства				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	3
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
2. Выступление с докладом			0	3
Поощрительные баллы				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов			0	5
2. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)			0	5
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			0	-10
Итоговый контроль				
2. Экзамен	15	2	0	30
Итого			0	110

Рейтинг-план дисциплины
функциональный анализ

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление 01.03.01 Математика

курс 3, семестр 6

Рейтинг-план №1 (экзамен)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Нормированные и гильбертовы пространства				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	5
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
3. Выступление с докладом	3	1	0	3
Модуль 2. Линейные функционалы и операторы в гильбертовых пространствах				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	3
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
2. Выступление с докладом			0	3
Поощрительные баллы				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов			0	5
2. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)			0	5
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
3. Посещение лекционных занятий			0	-6
4. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			0	-10
Итоговый контроль				
2. Экзамен	15	2	0	30
Итого			0	110