Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет"
Факультет математики и информационных технологий

Утверждено:	*Согласовано:*
на заседании кафедры ИТиКМ	Председатель УМК
протокол № 9 от 22 апреля 2020 г.	ФМ и ИТ
Зав. кафедрой *А.М. Болотнов*	*А.М. Ефимов*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

дисциплина ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

(наименование дисциплины)

часть, формируемая участниками образовательных отношений

(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультатив))

программа бакалавриата

Направление подготовки (специальность)

09.03.03 Прикладная информатика

(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки

Информационные и вычислительные технологии

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

бакалавр

(указывается квалификация)

Разработчик (составитель) доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, к.ф.-м.н., доцент *(должность, ученая степень, ученое звание)*	/ Манапова А.Р. *(подпись, Фамилия И.О.)*

Для приема: 2020

Уфа 2020 г.

Составитель / составители: доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики Манапова А.Р.

Рабочая программа дисциплины *утверждена* на заседании кафедры, протокол № 9 от «22»___04____2020 г.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры
____
____
____,
протокол № ____ от «____» ____________ 20 _ г.

Заведующий кафедрой ____________________/ _____________Ф.И.О./

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры
____
____
____,
протокол № ____ от «____» ____________ 20 _ г.

Заведующий кафедрой ____________________/ _____________Ф.И.О./

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций[1] (при наличии ОПК)	**Формируемая компетенция (с указанием кода)**	**Код и наименование индикатора достижения компетенции**
	ПК-1. Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*ПК-1.1. Знать методы проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности*
		ПК-1.2. Уметь проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности
		ПК-1.3. Владеть навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности
	ПК-2. Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*ПК-1.1. Знать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ*

[1] Указывается только для УК и ОПК (при наличии).

		ПК-1.2. Уметь применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ
		ПК-1.3. Владеть навыками применения современных методов разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ

2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «*Численные методы решения экстремальных задач*» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Дисциплина изучается обучающимися на дневной форме обучения на 3 курсе в 5 и 6 семестрах, дисциплина изучается обучающимися на заочной форме обучения на третьем курсе.

Цели изучения дисциплины: ознакомление студентов с основными положениями современной теории управления; формирование у студентов представления о связи фундаментальных проблем теории управления с задачами получения, передачи и обработки информации, анализа и организации вычислений, принятия решений.

3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4. Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

ПК-1. Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности

Планируемые результаты обучения (Индикаторы достижения заданного	Критерии оценивания результатов обучения			
	2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)

уровня освоения компетенций)				
ПК-1.1. Знать методы проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*Отсутствие знаний или фрагментарные представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Неполные представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Сформированные систематические представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*
ПК-1.2. Уметь проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*Отсутствие умений или фрагментарные умения проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*В целом успешное, но не систематическое использование на практике умений проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение на практике умений проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Сформированное умение проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*
ПК-1.3. Владеть навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*Отсутствие владения или фрагментарное владение.*	*В целом успешное, но не систематическое владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*

ПК-2. Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ

Планируемые результаты обучения (Индикаторы достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
	2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ПК-1.1. Знать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*Отсутствие знаний или фрагментарные представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Неполные представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Сформированные систематические представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*
ПК-1.2. Уметь применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*Отсутствие умений или фрагментарные умения применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*В целом успешное, но не систематическое использование на практике умений применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение на практике умений применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Сформированное умение применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*
ПК-1.3. Владеть навыками применения современных методов разработки и реализации алгоритмов конкретных математических	*Отсутствие владения или фрагментарное владение.*	*В целом успешное, но не систематическое владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной*	*Владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области*

моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ		*профессиональной деятельности.*	*области профессиональной деятельности.*	*профессиональной деятельности.*

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Компетенция (с указанием кода)	Результаты обучения *Индикатор достижения компетенции (с кодом)*	**Оценочные средства**
ПК-1. Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*ПК-1.1. Знать методы проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности*	*лабораторные работы; РГР (очная), контрольная работа (заочная); экзамен*
	ПК-1.2. Уметь проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*лабораторные работы; РГР (очная), контрольная работа (заочная); экзамен*
	ПК-1.3. Владеть навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*лабораторные работы; РГР (очная), контрольная работа (заочная); экзамен*
ПК-2. Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*ПК-1.1. Знать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ*	*лабораторные работы; РГР (очная), контрольная работа (заочная); экзамен*
	ПК-1.2. Уметь применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*лабораторные работы; РГР (очная), контрольная работа (заочная); экзамен*

	ПК-1.3. Владеть навыками применения современных методов разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*лабораторные работы; РГР (очная), контрольная работа (заочная); экзамен*

Критериями оценивания при *модульно-рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена:* текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(*для экзамена:*

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

Критериями оценивания (на заочной форме обучения) являются средняя оценка, полученная после проверки контрольной работы, сдачи лабораторных работ и экзамена.

Рейтинг-план дисциплины *(очная форма обучения)*
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки *09.03.03 Прикладная информатика*
курс **3**, семестр **VII, VIII**

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Вводная часть. Экстремальные задачи классического вариационного исчисления.				
Текущий контроль			**0**	**24**
1. Лабораторная работа №1	8	3	0	24
Рубежный контроль			**0**	**18**
1. РГР, задания 1-6	3	6	0	18
Модуль 2. Задачи оптимального управления и их классификация. Градиентные методы решения задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Конечномерные разностные аппроксимации задач.				
Текущий контроль			**0**	**16**
1. Аудиторная работа (доклад)	16	1	0	16
Рубежный контроль			**0**	**12**
1. РГР, задания 7-10	3	4	0	12
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических занятий			0	-10
Поощрительные баллы			0	10
Итоговый контроль				
1. Экзамен				30

Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета: состоит из одного вопроса теоретического характера.

Вопросы для экзамена:

1. Непрерывные функционалы в банаховых пространствах. Обобщенная теорема Вейерштрасса 1.
2. Функционалы полунепрерывные снизу и сверху. Критерий полунепрерывности снизу функционала.
3. Обобщенная теорема Вейерштрасса 2.

4. Функционалы слабо непрерывные и слабо полунепрерывные снизу и сверху. Критерий слабойполунепрерывности функционала снизу.
5. Обобщенная теорема Вейерштрасса 3.
6. Теорема Банаха-Сакса и ее обобщение (Мазур).
7. Теоремы: а) о слабой замкнутости множества в гильбертовом пространстве; б) о слабой полунепрерывности снизу нормы в гильбертовом пространстве; в) о слабой полунепрерывности снизу выпуклого функционала в рефлексивном банаховом пространстве.
8. Обобщенная теорема Вейерштрасса 4.
9. Дифференцируемость функционалов в смысле Фреше. Градиент функционала. Классы функционалов Cp(U), p=1,2, C1,1(U). Примеры.
10. Формулы конечных приращений для функционалов J(u) Є Cp(U), p=1,2.
11. Лемма об оценке для функционалов J(u) Є C1,1(U), p=1,2
12. Выпуклые множества и выпуклые функционалы; примеры. Критерий выпуклости гладких функционалов
13. Критерий выпуклости гладких функционалов. Примеры.
14. Критерий выпуклости гладких функционалов J(u)Є C2(u). Примеры.
15. Экстремальные свойства выпуклых функционалов. Теорема о точках локального и абсолютного минимума выпуклого функционала.
16. Критерий оптимальности функционалов J(u)Є C1(u), U≤B. Примеры.
17. Сильно выпуклые функционалы. Примеры. Критерии сильной выпуклости функционалов J(u)Є C1(u), U≤H. Примеры.
18. Критерий сильной выпуклости функционалов J(u)Є C2(U). Примеры.
19. Экстремальные свойства сильно выпуклых функционалов. Теорема о достижении нижней грани и сходимости минимизирующей последовательности сильно выпуклогополунепрерывного снизу функционала. Корректность задачи.
20. Линейное нормированное пространство. Классы функций Cn[a,b], n=0,1,2; расстояние //y1(x)-y2(x)//Cnn=0,1,2 между функциями (кривыми) y1(x), y2(x) в пространстве Cn[a,b]. Понятие о ε- окрестности n-го порядка кривой y(x) Є Cn[a,b], n=0,1,2. Геометрический смысл близости функций в смысле нормы пространства C иCn, n=0,1,2. Функционалы, линейные функционалы, ограниченные функционалы. Локальные экстремумы функционалов. Сильные и слабые локальные экстремумы функционалов, примеры. Непрерывные функционалы. Непрерывные функционалы в пространстве Cn, примеры.
21. Вариация функционала (два определения) Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами, вариация функционала в этой задаче. Теорема о необходимом условии существования слабого экстремума функционала, уравнение Эйлера, экстремали задачи.
22. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от нескольких функций. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
23. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от производных высших порядков. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
24. Вариационная задача с подвижными границами (концами). Простейшая задача. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала. Условие трансверсальности.
25. Частным случаем вариационной задачи с подвижными границами является задача, когда концы допустимых кривых лежат на прямых x=x0 и x=x1 , но y(x0) и y(x1) не заданы, т.е. граничные условия при x=x0 и x=x1 отсутствуют, это означает, что граничные точки (x0, y(x0)) и (x1, y(x1)) кривой y(x) могут перемещаться по вертикальным прямымx=x0 и x=x1 (возможен вариант, когда один из концов закреплен, а другой перемещается по прямой). В

этом частном случае вместо условий трансверсальности записываются, так называемые, естественные граничные условия (какие, выписать эти условия). Такую задачу вариационного исчисления называют также задачей вариационного исчисления без ограничений в классе непрерывно-дифференцируемых функций y(x), не удовлетворяющих каким либо граничным условиям при x=x0 и x=x1. Если же функция y(x) должна удовлетворять лишь одному граничному условию, например y(x0)= x0, то такую задачу называют задачей со свободным концом (x=x1), но допускающую слабый экстремум J(y) в классе функций y(x) Є C2[a,b] удовлетворяющих также условию y(x0)= x0. Сформулируйте соответствующие теоремы о необходимых условиях слабого экстремума функционала в рассмотренных случаях.

26. Задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Теорема о необходимом условии слабого экстремума.
27. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с конечными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
28. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с дифференциальными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
29. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
30. Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Задача об отыскании минимума функционала при условии, что один конец кривой y(x) фиксирован: y(x)= y0 , а второй лежит на заданной гладкой кривой y=g(x). При этом верхний предел интегрирования в функционале J(y) не фиксирован.
31. Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами. Необходимые условия экстремума - Принцип максимума Понтрягина. Иллюстрация принципа максимума.

Образец экзаменационного билета:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №1
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Градиентный метод решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории. Варианты этого метода. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:
- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Критерии оценки (в баллах) (очная форма):

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.

- **10-16** баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.

- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Шкала оценивания (для заочной формы обучения):

- «отлично» выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы (лабораторные работы и письменная контрольная работа) выполнена полностью без неточностей и ошибок;
- «хорошо» выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;
- «удовлетворительно» выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;
- «неудовлетворительно» выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Образец лабораторной работы:

<u>Лабораторная работа № …</u>

Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления: функционал, зависящий от производных высших порядков, функционал зависящий от нескольких функций. Вариационная задача с подвижными границами (концами).

1. Найти экстремаль функционала J (y1, y2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2 \right) dx$;y1(0) = y2(0) = 0, y1(π/2) = 1, y2 (π/2) = -1.

2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 dx}$; y(0) = 0; y(x1) =1.
3. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right) dx$; y(0) = 0.

Описание методики оценивания:

Критерии оценки (в баллах):

- 24 балла выставляется студенту, если практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- 18 баллов выставляется студенту, если при выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки; или выполнено только основное задание, но без ошибок и неточностей;

- 10 баллов выставляется студенту, если при решении задания допущены существенные ошибки, и обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий.

Темы эссе
(рефератов, докладов, сообщений)
по дисциплине Численные методы решения экстремальных задач
для аудиторной работы

Темы рефератов:

1. Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами, вариация функционала в этой задаче. Теорема о необходимом условии существования слабого экстремума функционала, уравнение Эйлера, экстремали задачи.
2. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от нескольких функций. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
3. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от производных высших порядков. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
4. Вариационная задача с подвижными границами (концами). Простейшая задача. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала. Условие трансверсальности.

5. Задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Теорема о необходимом условии слабого экстремума.

6. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с конечными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.

7. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.

8. Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Задача об отыскании минимума функционала при условии, что один конец кривой y(x) фиксирован: y(x)= y0 , а второй лежит на заданной гладкой кривой y=g(x). При этом верхний предел интегрирования в функционале J(y) не фиксирован.

9. Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами. Необходимые условия экстремума - Принцип максимума Понтрягина. Иллюстрация принципа максимума.

Описание методики оценивания аудиторной работы:

Критерии оценки (в баллах):

- 16баллов выставляется студенту, если раскрыта суть рассматриваемого аспекта и причина его рассмотрения; описание существующих для данного аспекта проблем и предлагаемые пути их решения; доклад имеет презентацию; соблюден регламент при представлении доклада; представление, а не чтение материала; использованы нормативные, монографические и периодические источники литературы; четкость дикции; правильность и своевременность ответов на вопросы; оформление доклада в соответствии с требованиями сдача его преподавателю;

-*10 баллов* выставляется студенту, если не выполнены любые два из вышеуказанных условий;

- *5 баллов* выставляется студенту, если не выполнены любые четыре из вышеуказанных условий;

Задания для РГР (очная форма обучения)

РГР состоит из 10 заданий. Задания 1-3 по простейшей задаче вариационного исчисления, и ее обобщениям. Задания 4-5 по вариационной задаче с подвижными границами. Задание 6 - задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Задания 7- 8 по вариационным задачам на условный экстремум с конечными и дифференциальными связями. Задания 9-10 – изопериметрическая задача и задача вариационного исчисления с подвижными концами и нефиксированным верхним пределом интегрирования.

Пример варианта РГР №1:

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

1. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left(y_1' y_2' + y_1 y_2\right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e$, $y_2(1) = 1/e$.

2. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\pi}\left(y_1'^2 - y_2'^2 + 2y_1'y_2' + 2y_1\cos x + 2y_2^2\right)dx$; $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = y_2(\pi)=0$, $y_1(\pi) = 1+\pi$.
3. J(y)=$\int_0^{x_1}\left(y'^2 + y^2\right)dx$; y(0) = 0, y($x_1$) = 1.
4. J(y)=$\int_0^{\pi/2}\left(y'^2 - y^2\right)dx$; y(0) = 0.
5. J(y)=$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y'^2 - y^2 + 4y\cos x)dx$; y(0) = 0.
6. J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y'^2 - y^2\right)dx + y^2(0) - y^2(\frac{\pi}{2}) + 4y(\frac{\pi}{2})$
7. J (y_1, y_2) = $\int_0^1(y_1'^2 + y_2'^2 + 1)dx$;

   $y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2; y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$
8. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\pi}\left(y_1'^2 - y_2'^2\right)dx$;

   $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}; y_1' - y_2 + \cos x = 0$
9. J(y_1, y_2)= $\int_0^1(y_1 + y_2)dx$;

   $y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(1) = -3; \int_0^1 y_1'y_2'dx = 0$;
10. J(y)=$\int_0^{x_1}\sqrt{1 + y'^2}\,dx$; $y(x_0) = x_0^2, y(x_1) = x_1 - 5$.

Описание методики оценивания:

Критерии оценки:

За первую часть РГР (задания 1-6)

- 18 баллов выставляется студенту, если верно выполнены6 заданий;
- 15 баллов выставляется студенту, если верно выполнены4-5 заданий;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 3 задания;
- 5 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания.

За вторую часть РГР (задания 7-10)

- 12 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 4 задания;
- 9 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 3 задания;
- 7 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 2 задания;
- 5 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 1 задание.

Зачет за РГР выставляется, если студент набрал 24 балла и выше (15 баллов и выше - за первую часть, 9 баллов и выше - за вторую часть РГР).

Задания для КР (заочная форма обучения)

КР состоит из 10 заданий. Задания 1-3 по простейшей задаче вариационного исчисления, и ее обобщениям. Задания 4-5 по вариационной задаче с подвижными границами. Задание 6 - задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Задания 7- 8 по вариационным задачам на условный экстремум с конечными и дифференциальными связями. Задания 9-10 – изопериметрическая задача и задача вариационного исчисления с подвижными концами и нефиксированным верхним пределом интегрирования.

Пример варианта КР №1:

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

1. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left(y_1' y_2' + y_1 y_2\right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e$, $y_2(1) = 1/e$.
2. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi} \left(y_1'^2 - y_2'^2 + 2y_1' y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2\right) dx$; $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = y_2(\pi) = 0$, $y_1(\pi) = 1+\pi$.
3. $J(y) = \int_0^{x_1} \left(y'^2 + y^2\right) dx$; $y(0) = 0$, $y(x_1) = 1$.
4. $J(y) = \int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right) dx$; $y(0) = 0$.
5. $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx$; $y(0) = 0$.
6. $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 - y^2\right) dx + y^2(0) - y^2(\frac{\pi}{2}) + 4y(\frac{\pi}{2})$
7. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1) dx$;

   $y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2; y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$
8. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi} \left(y_1'^2 - y_2'^2\right) dx$;

   $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}; y_1' - y_2 + \cos x = 0$
9. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1 + y_2) dx$;

   $y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(1) = -3; \int_0^1 y_1' y_2' dx = 0$;
10. $J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 dx}$; $y(x_0) = x_0^2, y(x_1) = x_1 - 5$.

Описание методики оценивания: Зачет за КР выставляется, если студент выполнил 7 заданий из 10.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации: учебник / Ф.П. Васильев. - Изд. нов., перераб. и доп. - Москва: МЦНМО, 2011. - Ч. 1. Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. - 620 с. - ISBN 978-5-94057-707-2.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Университетская библиотека online".— ISBN: 978-5-9963-0802-6 — http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63313

2. Алексеев, В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учебное пособие / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. - 3-е изд., испр. - Москва: Физматлит, 2011. - 408 с. - ISBN 978-5-9221-0992-5.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Университетская библиотека online".— ISBN: 978-5-9963-0333-5 — http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67227.

Дополнительная литература:

3. Летова, Т.А. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие / Т.А. Летова, А.В. Пантелеев. - Москва: Логос, 2011. - 424 с.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Университетская библиотека online".— ISBN: 978-5-9963-0333-5 — http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84995

в) перечень учебно-методических указаний для самостоятельной работы студентов

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Учебное пособие [Электронный ресурс] / Бахвалов Н. С. — 2-е изд., перераб. и доп. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. - 241 с.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Университетская библиотека online".— ISBN: 978-5-9963-0333-5 — <http://www.biblioclub.ru/book/115599/>.

2. СамарскийА.А.ВабищевичП.Н.Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие. М.: Эдиториал УРСС. 2000.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Университетская библиотека online".— ISBN: 978-5-9963-0333-5 — <http://www.biblioclub.ru/book/115599/>.

Рекомендуемые периодические издания (журналы):

1. Журнал «Дифференциальные уравнения» / гл. ред. академик РАН В.А. Ильин – М.: ООО Международная академическая издательская компания "Наука/Интерпериодика", выпускается с 1965г.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Научную-электронную библиотеку eLibrary.ru. — ISSN: 0374-0641— http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9677.

2. Журнал «Вычислительной математики и математической физики» / гл. ред. Ю.С. Осипов – М.: ООО Международная академическая издательская компания "Наука/Интерпериодика", выпускается с 1961г.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Научную-электронную библиотеку eLibrary.ru. — ISBN: 0044-4669— http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7791.

3. Журнал «Прикладная информатика»/ гл. ред. Емельянов А.А., — М.: «Синергия ПРЕСС», выпускается с 2006г.

Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему "Издательство «Лань»". — ISBN: 1993-8314 — <http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_cid=227&pl10_id=2067>.

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

1. Универсальная Базы данных EastView (доступ к электронным научным журналам) - https://dlib.eastview.com/browse

2. Научная электронная библиотека - elibrary.ru (доступ к электронным научным журналам) - https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp

3. Электронная библиотека диссертаций РГБ - http://diss.rsl.ru/

4. Учебный центр компьютерных технологий - www.microinform.ru/

5. SCOPUS - https://www.scopus.com

6. Web of Science - http://apps.webofknowledge.com

6.Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы*	*Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы*	*Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа*
1. ***Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:*** аудитория № 511 (физмат корпус- учебное), аудитория № 531 (физмат корпус- учебное). **2.** ***Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:*** аудитория № 511 (физмат корпус- учебное), № 531 (физмат корпус- учебное), аудитория № 522 (физмат корпус- учебное). **3.** ***Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:*** аудитория № 511 (физмат корпус- учебное), аудитория № 531 (физмат корпус- учебное). **4.** ***Учебная аудитория для текущего контроля***	**Аудитория №511** Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа проектор Mitsubishi EX 320U 3D 2.4кг., экран на штативе Draper Diplomat (1:1) 84/84* 213*213 MW, компьютер в составе: системный блок DEPO 460MD/3-540/T500G/DVD-RW, монитор 20". **Аудитория №531** Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (2101068302), доска аудитор. ДА32. **Читальный зал №2** Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт. **Аудитория №522** Учебная мебель, доска, персональный компьютер Lenovo Think Centre A70z Intel PentiumE 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер LessarLS/LU-H24KB2.	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные. 3. Python 3 (лицензияPython Software Foundation License, свободное программное обеспечение).

и промежуточной аттестации: аудитория № 511 (физмат корпус-учебное), аудитория № 531 (физмат корпус-учебное). **5.** ***Помещения для самостоятельной работы:*** читальный зал №2 (физмат корпус-учебное).		

Приложение № 1

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ[2]

дисциплины _Численные методы решения экстремальных задач_ на 7, 8 семестр
(наименование дисциплины)
Очная форма обучения

Вид работы	**Объем дисциплины**
Общая трудоемкость дисциплины (з.е. / часов)	5/180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	103.2
лекций	34
практических/ семинарских	
лабораторных	56
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	3.2
из них, предусмотренные на выполнение курсовой работы / курсового проекта[3]	
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	42
из них, предусмотренные на выполнение курсовой работы / курсового проекта[4]	
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	34.8

Форма(ы) контроля:
КР 6-й семестр
экзамен 6-йсеместр

[2] *Количество часов/з.е. указывается в соответствии с учебным планом, таблицы заполняются отдельно по каждой форме обучения (очной, очно-заочной, заочной).*
[3] *Контактных часов – 2*
[4] *Количество часов на самостоятельную работу указывается на усмотрение разработчика, но* ***не более 20 часов***

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	5- й семестр	18		18	36			
1	Введение. Общие понятия теории экстремальных задач в функциональных пространствах. Постановки задач на экстремум, корректно и некорректно поставленные задачи минимизации функционалов на множествах U из банаховых пространств B. Примеры.	1				1-2	1-2	
2	Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах. Дифференцируемость отображений (функционалов) в смысле Фреше. Производные Фреше отображения. Градиент функционала. Вариация отображения (функционала) по Лагранжу. Дифференцируемость отображения (функционала) по Гато, производная Гато. Примеры. Формулы конечных приращений для функционалов. Одна лемма об оценке для функционалов из класса $C^{1,1}(U)$.	1		2	5	1-2	1-2	Опрос
3	Гладкие задачи оптимизации функционалов без ограничений и с ограничениями. Необходимые а также необходимые и достаточные условия экстремума первого и второго порядков. Необходимые и достаточные условия минимума гладких выпуклых функционалов на выпуклом множестве U из банахова пространства B. Критерий оптимальности для гладких выпуклых функционалов. Примеры.	1		2	5	1-2	1-2	Лабораторная работа
4	Элементы выпуклого анализа. Теорема о точках локального и глобального минимумов выпуклых функционалов и строго выпуклых функционалов. Критерии выпуклости и сильной выпуклости гладких и	1		1	1	1-2	1-2	

	дважды гладких функционалов. Примеры.							
5	Сильная и слабая сходимость последовательности в банаховых пространствах. Множества в банаховых пространствах: замкнутые, слабо замкнутые, бикомпактные, слабо бикомпактные. Теоремы Банаха – Сакса и Мазура о слабой и сильной сходимости последовательностей в банаховых пространствах и следствия из теорем. Функционалы в банаховых пространствах: непрерывные, полунепрерывные, слабо непрерывные, слабо полунепрерывные, связь. между ними (возможно при некоторых условиях). Критерии полунепрерывности и слабой полунепрерывности. Общие теоремы об ограниченности снизу (сверху) и достижении функционалами экстремумов на множествах U из банаховых пространств B – обобщенные теоремы Вейерштрасса (для функционалов и множеств, наделенных некоторыми свойствами). Корректность постановок задач минимизации.	1		2	5	1-2		
6	Теорема о достижении нижней грани и сходимости минимизирующей последовательности сильно выпуклого полунепрерывного снизу функционала на выпуклом замкнутом множестве U гильбертова пространства H.	2			3	1-2		
7	Методы минимизации (оптимизации) функционалов, заданных на множествах U из гильбертовых пространств H: градиентные методы; метод проекции градиента; сопряженных градиентов; условного градиента; штрафных функционалов. Теоремы о сходимости методов.	2		2	2	1-2		
8	Основные понятия, основные определения классического вариационного исчисления. Функционалы, ограничения, граничные условия. Основные леммы вариационного исчисления. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала. Формула для первой и второй вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала – уравнение Эйлера. Экстремали функционала; допустимые экстремали функционала (вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления а также с помощью леммы Дюбуа – Реймона). Примеры.	2			5	1-2		
9	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума	1		2	2	1-2		

	функционала $J(y(x))$, зависящего от производных высших порядков $y(x)$. Уравнение Эйлера – Пуассона. Примеры.							
10	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$, зависящего от нескольких функций. Система дифференциальных уравнений Эйлера. Пример.	1		1	2	1-2		
11	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$ в задаче с фиксированным левым концом $x = a$ и свободным правым концом $x = b$. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		1	2	1-2		РГР
12	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$ в задаче без ограничений. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		1	2	1-2		
13	Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$. Необходимые условия оптимальности (в форме уравнения Эйлера и условий трансверсальности) при условиях: $y(a) = \varphi_0(a), y(b) = \varphi_1(b),\ \ где \varphi_0(x), \varphi_1(x) \in C^1[a, b]$ Пример.	1		1	2	1-2		
14	Задача вариационного исчисления со свободными границами и функционалом Больца $J(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y^{'})dx + f(y(a), y(b))$Необходимые условия слабого экстремума функционала $J(y(x))$. Пример.	1		1		1-2		
15	Задачи вариационного исчисления на условный экстремум функционала $J(y(x))$, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения в форме конечных связей (голономных связей). Функция Лагранжа, задача Лагранжа. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		2		1-2		РГР
	Зачет							

	6- й семестр	16		48	6			
16	Задачи вариационного исчисления на условный экстремум функционала $J\left(y(x)\right)$, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения в форме дифференциальных связей (неголономных связей). Метод множителей Лагранжа, задача Лагранжа. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		2		1-2	1-2	
17	Изопериметрическая вариационная задача на отыскание слабого экстремума функционала $J\left(y(x)\right)$. Множители Лагранжа, функция Лагранжа. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		2		1-2	1-2	
18	Вторая вариация функционала в простейшей задаче вариационного исчисления. Необходимые и достаточные условия слабого экстремума второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления. Условие Лежандра. Уравнение Якоби, условие Якоби. Функция Вейерштрасса. Необходимые и достаточные условия сильного экстремума. Примеры.	1		2		1-2	1-2	РГР
19	Основные понятия систем (объектов) управления. Управляемый процесс и его описание. Постановка задачи оптимального управления в общем кратком виде. Классификация задач оптимального управления по различным признакам (критериям). Функционалы, ограничения, граничные условия.	1				1-2	1-2	
20	Принцип максимума Понтрягина. Формулировка принципа максимума для задачи оптимального управления с закрепленными концами траектории и с закрепленным временем (моменты времени t_0 и T фиксированы): $J\left(u(\cdot)\right)=\int_{t_0}^{T} f^0\left(x(t),u(t),t\right)dt \to min, \dot{x}(t)=f\left(x(t),u(t),t\right), t_0 \le t \le T, x(t_0)=x_0, x(T)=x_1, u(t)\in V,\quad t_0 \le t \le T.$ Обсуждение принципа максимума Понтрягина. Краевая задача принципа максимума. Схема использования принципа максимума и соображения, дающие	1		2	1	1-2	1-2	

	возможность решить в некоторых случаях задачу оптимального управления в явном виде (правило решения). Примеры.							
21	Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления: $\int_{t_0}^{T} f^0\,(x(t),u(t),t)dt$ + $\Phi\big(x(T)\big) \to inf, \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), t_0 \le t \le T, x(t_0) \in S_0,\ \ x(T) \in S_1, u(t) \in V \subset R^n,\ \ t_0 \le t \le T$ с закрепленными начальным и конечным моментами времени (моменты t_0, T фиксированы), причем движение управляемого объекта подчинено начальным условиям $x(t_0) \in S_0(t_0)$ и конечным условием $x(T) \in S_1(T)$, при этом предполагается также, что правый конец траектории либо свободен, т.е. многообразие $S_1 \subseteq R^n$ имеет вид $S_1 = R^n$, либо многообразие S_1имеет вид $S_1 = \{x \in R^n\colon g_j(x) = 0,\ j = \overline{1,p_1}\}$,либо многообразие $S_1 \subseteq R^n$ задается с помощью уравнений $S_1 = \{x \in R^n\colon g_j(x) \le 0, j = \overline{1,m_1}; g_j(x) = 0,\ j = \overline{m_1+1,p_1}\}$ (в частности, если $g_j(x) = x^j - x_1^j,\ \ j = \overline{1,n},\ \ p_1$=n, то из $(*)$ получаем случай закрепленного правого конца: $x(T) = x_1$). Аналогично, на левом конце траектории предполагается, что либо многообразие $S_0 \subseteq R^n$ имеет вид $S_0 = R^n$, либо $S_0 = \{x \in R^n\colon h_j(x) = 0,\ j = \overline{1,p_0}\}$, либо $S_0 = \{x \in R^n\colon h_j(x) \le 0, j = \overline{1,m_0}; h_j(x) = 0,\ j = \overline{m_0+1,p_0}\}$ Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры.	1		2	1	1-2	1-2	

22	Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления: $\int_{t_0}^{T} f^0\,(x(t),u(t),t)dt$ + $\Phi(x(T),T) \to inf, \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), t_0 \le t \le T$, $x(t_0) \in S_0(t_0), x(T) \in S_1(T), u(t) \in V, t_0 \le t \le T,$ когда начальный и конечный моменты времени $t_0 u T$, вообще говоря, не известны и также подлежат определению, причем предполагается, что правый конец траектории либо свободен, т.е.$S_1(t) = R^n, t \in R$, либо множество $S_1(T) \subseteq R^n$ имеет вид $S_1(T) = \{x \in R^n:, g_j(x,T) \le 0,\ j = \overline{1,m_1};\ \ g_j(x,T) = 0,\ j = \overline{m_1+1,p_1}\}$ $(*) T \in R$. Аналогично, на левом конце траектории, либо $S_0(t_0) \equiv R^n, t_0 \in R$, либо множество $S_0(t_0) \subseteq R^n$ имеет вид $S_0(t_0) = \{x \in R^n:, h_j(x,t_0) \le 0, j = \overline{1,m_0};\ h_j(x,t_0) = 0, j = \overline{m_0+1,p_0}\}(**) t_0 \in R.$ Случаи $m_1 = 0$, или $p_1 = m_1$, или, $m_0 = 0$, или $p_0 = m_0$ в $(*)$, $(**)$ не исключаются. Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры.	1		2	1	1-2	1-2	Опрос
23	Принцип максимума Понтрягина в задаче о быстродействии. Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры	1		2	1	1-2	1-2	
24	Используя общий прием Лагранжа (принцип Лагранжа) сформулируйте теорему (принцип Лагранжа в задаче Лагранжа в понтрягинской форме) о необходимых условиях оптимальности для задачи Лагранжа в следующей потановке задачи оптимального управления: $J\big(x(\cdot),u(\cdot)\big) =$	1		2	1	1-2	1-2	

	$\int_{t_0}^{t_1} f^0\left(t, x(t), u(t)\right) dt +$ $\Phi(x(t_0), x(t_1)) \to inf, \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \ \varphi_j\left(x(t_0), x(t_1)\right) = 0, j = \overline{1,s}, u(t) \in V \subset R^r,$ где $f^0, f, \varphi_j, j = \overline{1,s}$ – непрерывно дифференцируемые функции. Обсудите формулировку принципа максимума, сформулируйте правило решения. Приведите модельные примеры.							
25	Задача Лагранжа в понтрягинской форме в общей постановке. Общий прием – принцип Лагранжа в задачах классического вариационного исчисления и оптимального управления. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа в общем случае (в общей постановке). Постановка задачи (задачи Лагранжа в понтрягинской форме) и формулировка теоремы Эйлера – Лагранжа (принцип Лагранжа) в задаче Лагранжа в понтрягинской форме). Обсуждение теоремы. Правило решения. Примеры.	1		2	1	1-2	1-2	
26	Формулировка и обсуждение принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления (в понтрягинской форме) в общей постановке в соответствии с общим принципом Лагранжа: $\mathcal{J}_0(\xi) \to min,$ $\mathcal{J}_i(\xi) \leq 0, i = \overline{1, m'},$ $\mathcal{J}_i(\xi) = 0, i = m' + 1, \dots m, \dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right), \forall t \in T$, $(*)$ $u(t) \in V, \forall t \in \Delta = [t_0, t_1] (**)$, где $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1), x \in KC^1(\Delta, R^n), u \in KC(\Delta, R^r), \Delta = [t_0, t_1], t_0 < t_1, \ V \subset R^r$ – произвольное множество, $T \in \Delta = [t_0, t_1]$ – множество точек непрерывности	1		2		1-2	1-2	

	функции $u = u(t), J(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i\big(t, x(t), u(t)\big)dt +$ $l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), i = 0,1, \dots m.$ В данной задаче отрезок $\Delta = [t_0, t_1]$ не фиксирован, а подлежит определению, – так же, как и заданные на нем функции $x(\cdot) и u(\cdot)$. Дифференциальная связь $(*)$ должна выполняться во всех точках непрерывности управления u. В отличие от задачи Лагранжа здесь имеется ограничение типа включения $(**)$, которое должно выполняться во всех точках $t \in \Delta = [t_0, t_1]$. Частным случаем данной задачи оптимального управления является задача, в которой концы (полностью или частично) закреплены. Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры.							
27	Доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с закрепленными начальным и конечным моментами времени t_0, T, закрепленным левым концом траектории и свободным правым концом траектории.	1		2		1-2	1-2	
28	Связь между принципом максимума Понтрягина и классическим вариационным исчислением.	1		2		1-2	1-2	
29	Градиент функционала в задаче оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ).	1		2		1-2	1-2	Опрос
30	Градиентный метод решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Варианты этого метода. Примеры.	1		2		1-2	1-2	
31	Метод проекции градиента решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Варианты этого метода. Примеры.	1		2		1-2	1-2	
32	Метод условного градиента решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой			2		1-2	1-2	

	описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Варианты этого метода. Примеры.							
33	Метод сопряженных градиентов решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Примеры.			2		1-2	1-2	
34	Применение метода штрафных функционалов при решении задач оптимального управления.			2		1-2	1-2	
35	Описание некоторых численных методов решения задач оптимального управления системами, описываемыми задачей Коши для ОДУ. Аппроксимации задач оптимального управления. Конечномерные разностные аппроксимации для одной квадратичной задачи оптимального управления.			2				
36	Задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных (оптимальное управление системами с распределенными в пространстве параметрами). Основные понятия распределенных систем (объектов) управления. Описания распределенных управляемых процессов. Уравнения состояния, функционалы, ограничения, граничные условия.			4				
37	Математические постановки некоторых задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями эллиптического, параболического и гиперболического типов. Корректность постановок задач оптимального управления. Некоторые постановки задач оптимального управления: «управление» физическими характеристиками объектов управления (субстанциями, свойствами среды), определяющими его состояние; управление процессами нагрева теплопроводящего стержня; управление колебательными процессами, описываемыми уравнением колебания струны и уравнением поперечных колебаний упругого стержня. Некоторые другие постановки задач оптимального управления для распределенных систем управления.			4				
38	Градиентные методы решения задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Конечномерные разностные аппроксимации задач оптимального управления для распределенных систем управления (некоторые			2				Опрос

	результаты и их обсуждение).							
	Всего часов:	34		56	42			

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины _Численные методы решения экстремальных задач_ на третий курс
(наименование дисциплины)
Заочная форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (з.е. / часов)	5/180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	25.2
лекций	8
практических/ семинарских	
лабораторных	14
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	3.2
из них, предусмотренные на выполнение курсовой работы / курсового проекта	
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	145.8
из них, предусмотренные на выполнение курсовой работы / курсового проекта	
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	9

Форма(ы) контроля:
КР - третий курс
экзамен - третий курс

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Зимняя сессия	4		4	64			
1	Введение. Общие понятия теории экстремальных задач в функциональных пространствах. Постановки задач на экстремум, корректно и некорректно поставленные задачи минимизации функционалов на множествах U из банаховых пространств B. Примеры.	1				1-2	1-2	
2	Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах. Дифференцируемость отображений (функционалов) в смысле Фреше. Производные Фреше отображения. Градиент функционала. Вариация отображения (функционала) по Лагранжу. Дифференцируемость отображения (функционала) по Гато, производная Гато. Примеры. Формулы конечных приращений для функционалов. Одна лемма об оценке для функционалов из класса $C^{1,1}(U)$.	1		1	5	1-2	1-2	Опрос
3	Гладкие задачи оптимизации функционалов без ограничений и с ограничениями. Необходимые а также необходимые и достаточные условия экстремума первого и второго порядков. Необходимые и достаточные условия минимума гладких выпуклых функционалов на выпуклом множестве U из банахова пространства B. Критерий оптимальности для гладких выпуклых функционалов. Примеры.	1			5	1-2	1-2	Лабораторная работа
4	Элементы выпуклого анализа. Теорема о точках локального и глобального минимумов выпуклых функционалов и строго выпуклых функционалов. Критерии выпуклости и сильной выпуклости гладких и	1			4	1-2	1-2	

	дважды гладких функционалов. Примеры.							
5	Сильная и слабая сходимость последовательности в банаховых пространствах. Множества в банаховых пространствах: замкнутые, слабо замкнутые, бикомпактные, слабо бикомпактные. Теоремы Банаха – Сакса и Мазура о слабой и сильной сходимости последовательностей в банаховых пространствах и следствия из теорем. Функционалы в банаховых пространствах: непрерывные, полунепрерывные, слабо непрерывные, слабо полунепрерывные, связь. между ними (возможно при некоторых условиях). Критерии полунепрерывности и слабой полунепрерывности. Общие теоремы об ограниченности снизу (сверху) и достижении функционалами экстремумов на множествах U из банаховых пространств B – обобщенные теоремы Вейерштрасса (для функционалов и множеств, наделенных некоторыми свойствами). Корректность постановок задач минимизации.				5	1-2		
6	Теорема о достижении нижней грани и сходимости минимизирующей последовательности сильно выпуклого полунепрерывного снизу функционала на выпуклом замкнутом множестве U гильбертова пространства H.				3	1-2		
7	Методы минимизации (оптимизации) функционалов, заданных на множествах U из гильбертовых пространств H: градиентные методы; метод проекции градиента; сопряженных градиентов; условного градиента; штрафных функционалов. Теоремы о сходимости методов.				2	1-2		
8	Основные понятия, основные определения классического вариационного исчисления. Функционалы, ограничения, граничные условия. Основные леммы вариационного исчисления. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала. Формула для первой и второй вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала – уравнение Эйлера. Экстремали функционала; допустимые экстремали функционала (вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления а также с помощью леммы Дюбуа – Реймона). Примеры.				5	1-2		
9	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума			1	5	1-2		

	функционала $J(y(x))$, зависящего от производных высших порядков $y(x)$. Уравнение Эйлера – Пуассона. Примеры.							
10	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$, зависящего от нескольких функций. Система дифференциальных уравнений Эйлера. Пример.			1	5	1-2		
11	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$ в задаче с фиксированным левым концом $x = a$ и свободным правым концом $x = b$. Необходимые условия оптимальности. Пример.			1	5	1-2		КР
12	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$ в задаче без ограничений. Необходимые условия оптимальности. Пример.				5	1-2		
13	Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$. Необходимые условия оптимальности (в форме уравнения Эйлера и условий трансверсальности) при условиях: $y(a) = \varphi_0(a), y(b) = \varphi_1(b),\ где \varphi_0(x), \varphi_1(x) \in C^1[a,b]$ Пример.				5	1-2		
14	Задача вариационного исчисления со свободными границами и функционалом Больца $J(y(x)) = \int_a^b F(x,y,y')dx + f(y(a), y(b))$Необходимые условия слабого экстремума функционала $J(y(x))$. Пример.				5	1-2		
15	Задачи вариационного исчисления на условный экстремум функционала $J(y(x))$, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения в форме конечных связей (голономных связей). Функция Лагранжа, задача Лагранжа. Необходимые условия оптимальности. Пример.				5	1-2		КР

	Летняя сессия	4		10	81.8			
16	Задачи вариационного исчисления на условный экстремум функционала $J(y(x))$, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения в форме дифференциальных связей (неголономных связей). Метод множителей Лагранжа, задача Лагранжа. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		1	1.8	1-2	1-2	
17	Изопериметрическая вариационная задача на отыскание слабого экстремума функционала $J(y(x))$. Множители Лагранжа, функция Лагранжа. Необходимые условия оптимальности. Пример.	1		1	10	1-2	1-2	
18	Вторая вариация функционала в простейшей задаче вариационного исчисления. Необходимые и достаточные условия слабого экстремума второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления. Условие Лежандра. Уравнение Якоби, условие Якоби. Функция Вейерштрасса. Необходимые и достаточные условия сильного экстремума. Примеры.	1		1	10	1-2	1-2	КР
19	Основные понятия систем (объектов) управления. Управляемый процесс и его описание. Постановка задачи оптимального управления в общем кратком виде. Классификация задач оптимального управления по различным признакам (критериям). Функционалы, ограничения, граничные условия.	1			10	1-2	1-2	
20	Принцип максимума Понтрягина. Формулировка принципа максимума для задачи оптимального управления с закрепленными концами траектории и с закрепленным временем (моменты времени t_0 и T фиксированы): $J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt \to min, \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), t_0 \le t \le T, x(t_0) = x_0, x(T) = x_1, u(t) \in V, \quad t_0 \le t \le T.$ Обсуждение принципа максимума Понтрягина. Краевая задача принципа максимума. Схема использования принципа максимума и соображения, дающие возможность решить в некоторых случаях задачу			1	10	1-2	1-2	

	оптимального управления в явном виде (правило решения). Примеры.							
21	Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления: $\int_{t_0}^{T} f^0\,(x(t),u(t),t)dt$ + $\Phi\big(x(T)\big) \to inf, \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), t_0 \le t \le T, x(t_0) \in S_0,\;\; x(T) \in S_1, u(t) \in V \subset R^n,\;\;\; t_0 \le t \le T$ с закрепленными начальным и конечным моментами времени (моменты t_0, T фиксированы), причем движение управляемого объекта подчинено начальным условиям $x(t_0) \in S_0(t_0)$ и конечным условием $x(T) \in S_1(T)$, при этом предполагается также, что правый конец траектории либо свободен, т.е. многообразие $S_1 \subseteq R^n$ имеет вид $S_1 = R^n$, либо многообразие S_1имеет вид $S_1 = \{x \in R^n: g_j(x) = 0,\; j = \overline{1, p_1}\}$,либо многообразие $S_1 \subseteq R^n$ задается с помощью уравнений $S_1 = \{x \in R^n: g_j(x) \le 0, j = \overline{1, m_1}; g_j(x) = 0,\; j = \overline{m_1 + 1, p_1}\}$ (в частности, если $g_j(x) = x^j - x_1^j,\;\; j = \overline{1, n},\;\; p_1$=n, то из $(*)$ получаем случай закрепленного правого конца: $x(T) = x_1$). Аналогично, на левом конце траектории предполагается, что либо многообразие $S_0 \subseteq R^n$ имеет вид $S_0 = R^n$, либо $S_0 = \{x \in R^n: h_j(x) = 0,\; j = \overline{1, p_0}\}$, либо $S_0 = \{x \in R^n: h_j(x) \le 0, j = \overline{1, m_0}; h_j(x) = 0,\; j = \overline{m_0 + 1, p_0}\}$ Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры.			1	5	1-2	1-2	
22	Принцип максимума Понтрягина для задачи			1	5	1-2	1-2	Опрос

	оптимального управления: $\int_{t_0}^{T} f^0\,(x(t),u(t),t)dt$ + $\Phi(x(T),T) \to inf, \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), t_0 \le t \le T$, $x(t_0) \in S_0(t_0), x(T) \in S_1(T), u(t) \in V, t_0 \le t \le T,$ когда начальный и конечный моменты времени $t_0 uT$, вообще говоря, не известны и также подлежат определению, причем предполагается, что правый конец траектории либо свободен, т.е.$S_1(t) = R^n, t \in R$, либо множество $S_1(T) \subseteq R^n$ имеет вид $S_1(T) = \{x \in R^n: , g_j(x,T) \le 0,\ j = \overline{1,m_1};\ \ g_j(x,T) = 0,\ j = \overline{m_1+1,p_1}\}$ $(*) T \in R.$ Аналогично, на левом конце траектории, либо $S_0(t_0) \equiv R^n, t_0 \in R,$ либо множество $S_0(t_0) \subseteq R^n$ имеет вид $S_0(t_0) = \{x \in R^n: , h_j(x,t_0) \le 0, j = \overline{1,m_0};\ h_j(x,t_0) = 0, j = \overline{m_0+1,p_0}\}(**) t_0 \in R.$ Случаи $m_1 = 0$, или $p_1 = m_1$, или, $m_0 = 0$, или $p_0 = m_0$ в $(*)$, $(**)$ не исключаются. Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры.							
23	Принцип максимума Понтрягина в задаче о быстродействии. Обсуждение принципа максимума. Правило решения. Примеры			1	5	1-2	1-2	
24	Градиент функционала в задаче оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ).			1	5	1-2	1-2	Опрос
25	Градиентный метод решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Варианты этого метода. Примеры.				5	1-2	1-2	
26	Метод проекции градиента решения задачи оптимального				5	1-2	1-2	

	управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Варианты этого метода. Примеры.							
27	Метод условного градиента решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Варианты этого метода. Примеры.				5	1-2	1-2	
28	Метод сопряженных градиентов решения задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, состояние процесса управления в которой описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Примеры.				5	1-2	1-2	
	Всего часов:	8		14	145.8			

Приложение к
рабочей программе дисциплины

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Фонд оценочных средств

по учебной дисциплине

«Численные методы решения экстремальных задач»

наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

программа бакалавриата

09.03.03 Прикладная информатика

шифр и наименование направления

Информационные и вычислительные технологии

направленность (профиль) подготовки

Список документов и материалов

1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.
2. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

1. **Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.**

ПК-1. Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности

Планируемые результаты обучения (Индикаторы достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
	2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ПК-1.1. Знать методы проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*Отсутствие знаний или фрагментарные представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Неполные представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Сформированные систематические представления о методах проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*
ПК-1.2. Уметь проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*Отсутствие умений или фрагментарные умения проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*В целом успешное, но не систематическое использование на практике умений проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение на практике умений проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*Сформированное умение проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.*
ПК-1.3. Владеть навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной	*Отсутствие владения или фрагментарное владение.*	*В целом успешное, но не систематическое владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной*	*Владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области*

области профессиональной деятельности		*профессиональной деятельности.*	*области профессиональной деятельности.*	*профессиональной деятельности.*

ПК-2. Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ

Планируемые результаты обучения (Индикаторы достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
	2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ПК-1.1. Знать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*Отсутствие знаний или фрагментарные представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Неполные представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Сформированные систематические представления о современных методах разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*
ПК-1.2. Уметь применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*Отсутствие умений или фрагментарные умения применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*В целом успешное, но не систематическое использование на практике умений применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение на практике умений применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*	*Сформированное умение применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.*
ПК-1.3. Владеть навыками применения современных методов разработки и реализации алгоритмов конкретных	*Отсутствие владения или фрагментарное владение.*	*В целом успешное, но не систематическое владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной*	*В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих*	*Владение навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной*

математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ		*области профессиональной деятельности.*	*методов в конкретной области профессиональной деятельности.*	*области профессиональной деятельности.*

2. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Компетенция (с указанием кода)	Результаты обучения *Индикатор достижения компетенции (с кодом)*	**Оценочные средства**
ПК-1. Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*ПК-1.1. Знать методы проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности*	*лабораторные работы; контрольная работа; экзамен*
	ПК-1.2. Уметь проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*лабораторные работы; контрольная работа; экзамен*
	ПК-1.3. Владеть навыками проведения под научным руководством исследований на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	*лабораторные работы; контрольная работа; экзамен*
ПК-2. Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*ПК-1.1. Знать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ*	*лабораторные работы; контрольная работа; экзамен*
	ПК-1.2. Уметь применять современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*лабораторные работы; контрольная работа; экзамен*

	ПК-1.3. Владеть навыками применения современных методов разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ	*лабораторные работы; контрольная работа; экзамен*

Критериями оценивания при *модульно–рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена:* текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; *для зачета:* текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(*для экзамена:*

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета: состоит из одного вопроса теоретического характера.

Вопросы для экзамена:

1. Непрерывные функционалы в банаховых пространствах. Обобщенная теорема Вейерштрасса 1.
2. Функционалы полунепрерывные снизу и сверху. Критерий полунепрерывности снизу функционала.
3. Обобщенная теорема Вейерштрасса 2.
4. Функционалы слабо непрерывные и слабо полунепрерывные снизу и сверху. Критерий слабойполунепрерывности функционала снизу.
5. Обобщенная теорема Вейерштрасса 3.
6. Теорема Банаха-Сакса и ее обобщение (Мазур).
7. Теоремы: а) о слабой замкнутости множества в гильбертовом пространстве; б) о слабой полунепрерывности снизу нормы в гильбертовом пространстве; в) о слабой полунепрерывности снизу выпуклого функционала в рефлексивном банаховом пространстве.
8. Обобщенная теорема Вейерштрасса 4.
9. Дифференцируемость функционалов в смысле Фреше. Градиент функционала. Классы функционалов Cp(U), p=1,2, C1,1(U). Примеры.
10. Формулы конечных приращений для функционалов J(u) Є Cp(U), p=1,2.
11. Лемма об оценке для функционалов J(u) Є C1,1(U), p=1,2
12. Выпуклые множества и выпуклые функционалы; примеры. Критерий выпуклости гладких функционалов
13. Критерий выпуклости гладких функционалов. Примеры.
14. Критерий выпуклости гладких функционалов J(u)Є C2(u). Примеры.
15. Экстремальные свойства выпуклых функционалов. Теорема о точках локального и абсолютного минимума выпуклого функционала.
16. Критерий оптимальности функционалов J(u)Є C1(u), U≤B. Примеры.
17. Сильно выпуклые функционалы. Примеры. Критерии сильной выпуклости функционалов J(u)Є C1(u), U≤H. Примеры.
18. Критерий сильной выпуклости функционалов J(u)Є C2(U). Примеры.
19. Экстремальные свойства сильно выпуклых функционалов. Теорема о достижении нижней грани и сходимости минимизирующей последовательности сильно выпуклогополунепрерывного снизу функционала. Корректность задачи.
20. Линейное нормированное пространство. Классы функций Cn[a,b], n=0,1,2; расстояние //y1(x)-y2(x)//Cnn=0,1,2 между функциями (кривыми) y1(x), y2(x) в пространстве Cn[a,b]. Понятие о ε- окрестности n-го порядка кривой y(x) Є Cn[a,b], n=0,1,2. Геометрический смысл близости функций в смысле нормы пространства C иCn, n=0,1,2. Функционалы, линейные функционалы, ограниченные функционалы. Локальные экстремумы функционалов. Сильные и слабые локальные экстремумы функционалов, примеры. Непрерывные функционалы. Непрерывные функционалы в пространстве Cn, примеры.
21. Вариация функционала (два определения) Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами, вариация функционала в этой задаче. Теорема о необходимом условии существования слабого экстремума функционала, уравнение Эйлера, экстремали задачи.
22. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от нескольких функций. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
23. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от производных высших порядков. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.

24. Вариационная задача с подвижными границами (концами). Простейшая задача. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала. Условие трансверсальности.
25. Частным случаем вариационной задачи с подвижными границами является задача, когда концы допустимых кривых лежат на прямых x=x0 и x=x1 , но y(x0) и y(x1) не заданы, т.е. граничные условия при x=x0 и x=x1 отсутствуют, это означает, что граничные точки (x0, y(x0)) и (x1, y(x1)) кривой y(x) могут перемещаться по вертикальным прямымx=x0 и x=x1 (возможен вариант, когда один из концов закреплен, а другой перемещается по прямой). В этом частном случае вместо условий трансверсальности записываются, так называемые, естественные граничные условия (какие, выписать эти условия). Такую задачу вариационного исчисления называют также задачей вариационного исчисления без ограничений в классе непрерывно-дифференцируемых функций y(x), не удовлетворяющих каким либо граничным условиям при x=x0 и x=x1. Если же функция y(x) должна удовлетворять лишь одному граничному условию, например y(x0)= x0, то такую задачу называют задачей со свободным концом (x=x1), но допускающую слабый экстремум J(y) в классе функций y(x) Є C2[a,b] удовлетворяющих также условию y(x0)= x0. Сформулируйте соответствующие теоремы о необходимых условиях слабого экстремума функционала в рассмотренных случаях.
26. Задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Теорема о необходимом условии слабого экстремума.
27. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с конечными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
28. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с дифференциальными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
29. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
30. Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Задача об отыскании минимума функционала при условии, что один конец кривой y(x) фиксирован: y(x)= y0 , а второй лежит на заданной гладкой кривой y=g(x). При этом верхний предел интегрирования в функционале J(y) не фиксирован.
31. Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами. Необходимые условия экстремума - Принцип максимума Понтрягина. Иллюстрация принципа максимума.

Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.

- 10-16 баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.

- 1-10 баллов выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Экзаменационные билеты – Приложение №2.

Расчётно-графические работы

РГР состоит из 10 заданий. Задания 1-3 по простейшей задаче вариационного исчисления, и ее обобщениям. Задания 4-5 по вариационной задаче с подвижными границами. Задание 6 - задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Задания 7- 8 по вариационным задачам на условныйэкстремумс конечными и дифференциальными связями. Задания 9-10 – изопериметрическая задача и задача вариационного исчисления с подвижными концами и нефиксированным верхним пределом интегрирования.

Описание методики оценивания:

Критерии оценки:
За первую часть РГР (задания 1-6)
- 18 баллов выставляется студенту, если верно выполнены6 заданий;
- 15 баллов выставляется студенту, если верно выполнены4-5 заданий;
- 10 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 3 задания;
- 5 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 2 задания.

За вторую часть РГР (задания 7-10)
- 12 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 4 задания;
- 9 баллов выставляется студенту, если верно выполнены 3 задания;
- 7 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 2 задания;
- 5 баллов выставляется студенту, если верно выполнено 1 задание.

Зачет за РГР выставляется, если студент набрал 24 балла и выше (15 баллов и выше - за первую часть, 9 баллов и выше - за вторую часть РГР).

Варианты РГР – Приложение №3.

Лабораторные работы

Лабораторная работа №1. «*Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления: функционал, зависящий от производных высших порядков, функционал зависящий от нескольких функций. Вариационная задача с подвижными границами (концами)*».

Описание методики оценивания:

Критерии оценки (в баллах):

- 24 балла выставляется студенту, если практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- 18 баллов выставляется студенту, если при выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки; или выполнено только основное задание, но без ошибок и неточностей;

- 10 баллов выставляется студенту, если при решении задания допущены существенные ошибки, и обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий.

Варианты заданий для лабораторных работ – Приложение №4.

Темы эссе
(рефератов, докладов, сообщений)
по дисциплине ***Численные методы решения экстремальных задач***
<u>для аудиторной работы</u>

Темы рефератов:

1. Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами, вариация функционала в этой задаче. Теорема о необходимом условии существования слабого экстремума функционала, уравнение Эйлера, экстремали задачи.
2. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от нескольких функций. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
3. Понятие простейшей задачи вариационного исчисления: функционал зависящий от производных высших порядков. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала.
4. Вариационная задача с подвижными границами (концами). Простейшая задача. Теорема о необходимом условии слабого экстремума функционала. Условие трансверсальности.
5. Задача вариационного исчисления без ограничений с функционалом Больца. Теорема о необходимом условии слабого экстремума.
6. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с конечными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
7. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.
8. Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Задача об отыскании минимума функционала при условии, что один конец кривой y(x) фиксирован: y(x)= y0 , а второй лежит на заданной гладкой кривой y=g(x). При этом верхний предел интегрирования в функционале J(y) не фиксирован.
9. Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами. Необходимые условия экстремума - Принцип максимума Понтрягина. Иллюстрация принципа максимума.

Описание методики оценивания аудиторной работы:

Критерии оценки (в баллах):

- 16баллов выставляется студенту, если раскрыта суть рассматриваемого аспекта и причина его рассмотрения; описание существующих для данного аспекта проблем и предлагаемые пути их решения; доклад имеет презентацию; соблюден регламент при представлении доклада; представление, а не чтение материала; использованы нормативные, монографические и периодические источники литературы; четкость дикции; правильность и своевременность ответов на вопросы; оформление доклада в соответствии с требованиями сдача его преподавателю;

-*10 баллов* выставляется студенту, если не выполнены любые два из вышеуказанных условий;

- *5 баллов* выставляется студенту, если не выполнены любые четыре из вышеуказанных условий.

Приложение 1

Рейтинг-план дисциплины

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки *09.03.03 Прикладная информатика*

курс **4**, семестр **VII, VIII**

<table>
<tr><td rowspan="2">Виды учебной деятельности студентов</td><td rowspan="2">Балл за конкретное задание</td><td rowspan="2">Число заданий за семестр</td><td colspan="2">Баллы</td></tr>
<tr><td>Минимальный</td><td>Максимальный</td></tr>
<tr><td colspan="5">Модуль 1. Вводная часть. Экстремальные задачи классического вариационного исчисления.</td></tr>
<tr><td>Текущий контроль</td><td></td><td></td><td>0</td><td>24</td></tr>
<tr><td>1. Лабораторная работа №1</td><td>8</td><td>3</td><td>0</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td></td><td></td><td>0</td><td>18</td></tr>
<tr><td>1. РГР, задания 1-6</td><td>3</td><td>6</td><td>0</td><td>18</td></tr>
<tr><td colspan="5">Модуль 2. Задачи оптимального управления и их классификация. Градиентные методы решения задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Конечномерные разностные аппроксимации задач.</td></tr>
<tr><td>Текущий контроль</td><td></td><td></td><td>0</td><td>16</td></tr>
<tr><td>1. Аудиторная работа (доклад)</td><td>16</td><td>1</td><td>0</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td></td><td></td><td>0</td><td>12</td></tr>
<tr><td>1. РГР, задания 7-10</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="3">Посещаемость</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1. Посещение лекционных занятий</td><td></td><td></td><td>0</td><td>-6</td></tr>
<tr><td>2. Посещение практических занятий</td><td></td><td></td><td>0</td><td>-10</td></tr>
<tr><td colspan="3">Поощрительные баллы</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="5">Итоговый контроль</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Экзамен</td><td></td><td>30</td></tr>
</table>

Приложение 2

Экзаменационные билеты

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №1
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Задача об отыскании минимума функционала при условии, что один конец кривой $y(x)$ фиксирован: $y(x)= y_0$, а второй лежит на заданной гладкой кривой $y=g(x)$. При этом верхний предел интегрирования в функционале $J(y)$ не фиксирован.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №2
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №3
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с конечными связями. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума. Метод множителей Лагранжа.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №4
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Задача вариационного исчисления со свободными границами и функционалом Больца $J =$. Необходимые условия слабого экстремума функционала J . Пример.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №5
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами по отысканию слабого экстремума функционала $J(y(x))$. Необходимые условия оптимальности (в форме уравнения Эйлера и условий трансверсальности) при условиях:

$\boldsymbol{y(a) = \varphi_0(a), y(b) = \varphi_1(b)}$, где $\boldsymbol{\varphi_0}$(:. Пример.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №6
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала J в задаче без ограничений. Необходимые условия оптимальности. Пример.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №7
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала J в задаче с фиксированным левым концом и свободным правым концом . Необходимые условия оптимальности. Пример.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №8
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Общие понятия теории экстремальных задач в функциональных пространствах. Постановки задач на экстремум, корректно и некорректно поставленные задачи минимизации функционалов на множествах из банаховых пространств . Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №9
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Дифференцируемость функционалов в смысле Фреше. Градиент функционала. Классы функционалов $C^p(U)$, $p=1,2$, $C^{1,1}(U)$. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №10
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Необходимые и достаточные условия минимума гладких выпуклых функционалов на выпуклом множестве из банахова пространства .

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №11
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Формулы конечных приращений для функционалов $J(u) \in C^p(U)$, $p=1,2$.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №12
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Дифференцируемость отображения (функционала) по Гато, производная Гато. Лемма об оценке для функционалов $J(u) \in C^{1,1}(U)$, $p=1,2$.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №13
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Выпуклые множества и выпуклые функционалы; примеры. Критерий выпуклости гладких функционалов.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №14
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Критерий выпуклости гладких функционалов. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №15
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Экстремальные свойства сильно выпуклых функционалов. Теорема о достижении нижней грани и сходимости минимизирующей последовательности сильно выпуклого полунепрерывного снизу функционала. Корректность задачи.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №16
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Экстремальные свойства выпуклых функционалов. Теорема о точках локального и абсолютного минимума выпуклого функционала.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №17
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Критерий выпуклости гладких функционалов $J(u) \in C^2(u)$. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №18
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Критерий оптимальности функционалов $J(u) \in C^1(u)$, $U \leq B$. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №19
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Сильная и слабая сходимость последовательности в банаховых пространствах. Множества в банаховых пространствах: замкнутые, слабо замкнутые, бикомпактные, слабо бикомпактные.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №20
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Сильно выпуклые функционалы. Примеры. Критерии сильной выпуклости функционалов $J(u) \in C^1(u)$, $U \leq H$. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №21
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Критерий сильной выпуклости функционалов $J(u) \in C^2(U)$. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №22
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Функционалы в банаховых пространствах: непрерывные, полунепрерывные, слабо непрерывные, слабо полунепрерывные, связь между ними (возможно при некоторых условиях). Критерии полунепрерывности и слабойполунепрерывности.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №23
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Общие теоремы об ограниченности снизу (сверху) и достижении функционалами экстремумов на множествах из банаховых пространств – обобщенные теоремы Вейерштрасса (для функционалов и множеств, наделенных некоторыми свойствами). Корректность постановок задач минимизации.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №24
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Теорема о достижении нижней грани и сходимости минимизирующей последовательности сильно выпуклогополунепрерывного снизу функционала на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства .

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №25
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Методы минимизации (оптимизации) функционалов, заданных на множествах из гильбертовых пространств : градиентные методы. Теорема о сходимости метода.

Преподаватель Манапова А.Р. /_______________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /_______________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №26
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Методы минимизации функционалов, заданных на множествах из гильбертовых пространств метод проекции градиента. Теорема о сходимости метода.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №27
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Методы минимизации функционалов, заданных на множествах из гильбертовых пространств : метод условного градиента. Теорема о сходимости метода.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №28
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами, вариация функционала в этой задаче. Теорема о необходимом условии существования слабого экстремума функционала, уравнение Эйлера, экстремали задачи.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №29
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала J , зависящего от производных высших порядков . Уравнение Эйлера – Пуассона. Примеры.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Экзаменационный билет №30
по курсу «Численные методы решения экстремальных задач»
(2020-2021 у.г.)

1. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления по отысканию слабого экстремума функционала J , зависящего от нескольких функций. Система дифференциальных уравнений Эйлера. Пример.

Преподаватель Манапова А.Р. /________________/

Зав. кафедрой Болотнов А.М. /________________/

Приложение 3

Варианты заданий для РГР

Вариант №1

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

11. J (y_1, y_2) = $\int_0^1 \left(y_1' y_2' + y_1 y_2\right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e$, $y_2(1) = 1/e$.
12. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\pi} \left(y_1'^2 - y_2'^2 + 2y_1' y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2\right) dx$; $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = y_2(\pi) = 0$, $y_1(\pi) = 1+\pi$.
13. J(y)=$\int_0^{x_1} \left(y'^2 + y^2\right) dx$; $y(0) = 0$, $y(x_1) = 1$.
14. J(y)=$\int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right) dx$; $y(0) = 0$.
15. J(y)=$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx$; $y(0) = 0$.
16. J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 - y^2\right) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right)$
17. J (y_1, y_2) = $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1) dx$;

    $y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2; y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$
18. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\pi} \left(y_1'^2 - y_2'^2\right) dx$;

    $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}; y_1' - y_2 + \cos x = 0$
19. J(y_1, y_2)= $\int_0^1 (y_1 + y_2) dx$;
    $y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(1) = -3; \int_0^1 y_1' y_2' dx = 0$;
20. J(y)=$\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 dx}$; $y(x_0) = x_0^2, y(x_1) = x_1 - 5$.

Вариант №2

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

1. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2 \right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2(\pi/2) = -1$.
2. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \cos x)\, dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; y_1 - y_2 - \sin x = 0.$

3. J (y_1, y_2) =$\int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2\right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = \mathrm{sh}1$, $y_2(\pi/2) = -\mathrm{sh}1$.
4. J (y_1, y_2) = $\int_0^1 \left(y_1'^{\,2} + 2y_1'^2 + y_2^2\right) dx$;

$y_1(0) = -2, y_2(0) = 1, y_1(1) = -e^{-1}, y_2(1) = 0; y_1 - y_2' = 0$

5. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y_1' y_2' - y_1 y_2\right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2(\pi/2) = -1$.

6. J $(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1)dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2; y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$

7. J $(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2)dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e$, $y_2(1) = 1/e$.

8. J $(y_1, y_2) = \int_0^\pi (y_1'^2 - y_2'^2)dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}; y_1' - y_2 + \cos x = 0$

9. J $(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1)dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1(1) = 3/2$, $y_2(1) = 1$.

10. J(y)= $\int_0^\pi y \sin x \, dx$;

$y(0) = 0, \ y(\pi) = \pi; \ \int_0^\pi y'^2 dx = \frac{3}{2}\pi$

Вариант №3

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

1. J $(y_1, y_2) = \int_0^\pi (y_1'^2 - y_2'^2 + 2y_1' y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2)dx$; $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = y_2(\pi) = 0$, $y_1(\pi) = 1+\pi$.
2. J(y)= $\int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$;
   $y(0) = 0, \ y(1) = e^{-1}; \int_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2})$
3. J(y)= $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$; y(0) = 0; $y(x_1) = \frac{1}{1 - x_1^2}$.
4. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1' y_2' dx$;
   $y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, y_2(1) = 1; \int_0^1 y_1 dx = 1, \int_0^1 y_2 dx = 0$
5. J(y)= $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$; $y(x_0) = x_0^2, y(x_1) = x_1 - 5$
6. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1 + y_2)dx$;
   $y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(1) = -3; \int_0^1 y_1' y_2' dx = 0$
7. J(y)= $\int_0^{x_1} y'^2 dx$; y(0) = 0; $y(x_1) = -x_1 - 1$
8. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)dx$;
   $y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0 = \ y_2(1) = 0; \int_0^1 y_1 y_2 dx = -2$
9. J $(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1)dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1(1) = 3/2$, $y_2(1) = 1$.
10. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 x(y_1 - y_2)dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, y_1(1) = 2; \int_0^1 y_1^{`} y_2^{`} dx = -\frac{4}{5}$

Вариант №4

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

1. J(y)=$\int_0^{\pi/2} \left(y^{`2} - y^2\right) dx$; y(0) = 0.
2. J (y_1, y_2) = $\int_a^b \left(y_1 + y_2 + y_2^{`}\right) dx$;

   $$y_1(a) = y_1^{(0)}, y_2(a) = y_2^{(0)}, y_1(b) = y_1^{(1)}, y_2(b) = y_2^{(1)}; y_1^{`} + y_2^{`} - 1 = 0$$
3. J(y)=$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^{`2}}}{y} dx$; y(0) = 1, y($x_1$)=$x_1$-1.
4. J(y)= $\int_0^3 4y^{`2} y^2 dx + y^4(0) - 8y(3)$
5. J(y)=$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^{`2} - y^2 + 4y\cos x) dx$; y(0) = 0.
6. J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y^{`2} - y^2\right) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right)$
7. J(y)=$\int_0^{x_1} \left(y^{`2} + y^2\right) dx$; y(0) = 0, y($x_1$) = 1.
8. J(y)= $\int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y\sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi)$
9. J(y)=$\int_0^{1/2} \left(y - y^{`2}\right) dx$; y(0) = 0.
10. J (y_1, y_2) = $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1)\, dx$;

    $$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2; y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$$

Вариант №5

Найти экстремаль функционала в следующих задачах:

1. J (y_1, y_2) = $\int_0^1 \left(y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2 \right) dx$; $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = y_2(1) = 1$.
2. J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2 + 4y\cos x) dx$; y(0) = 0.
3. J (y_1, y_2) = $\int_1^3 \left(xy_1'^2 + xy_1 y_2 \right) dx$; $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = y_3(3)=0$, $y_1(3) = \ln 3 + 1$.
4. J(y)= $\int_0^1 y'^2 dx + y^2(0) - 2y^2(1)$
5. J(y)=$\int_0^1 \left(y^{`2} + y^2\right) dx - 2sh\, 1\, y(1)$.

6. J(y)= $\int_0^1 y'^2 dx$;
$y(0) = y(1) = 0; \int_0^1 y dx = 0, \int_0^1 xy dx = 0$

7. J(y)=$\int_0^e (2y'(xy'+y)dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e)$.

8. J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2)\, dx$;
$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1; y_1' + y_2' - 4x = 0$

9. J (y_1, y_2) =$\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 \ + 2ye^x \ \right) dx$; y (0) =0,y(1) = 1/2e.

10. 2. J(y_1, y_2)= $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)\, dx$;
$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0 = \ y_2(1) = 0; \int_0^1 y_1y_2 dx = -2$

Приложение 4

Варианты заданий для лабораторных работ

<u>Лабораторная работа № 1</u>

«*Простейшая задача вариационного исчисления с закрепленными концами. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления: функционал, зависящий от производных высших порядков, функционал зависящий от нескольких функций. Вариационная задача с подвижными границами (концами)*».

Вариант 1

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2 \right) dx$;$y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2 (\pi/2) = -1$.
2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \cos x)\, dx;$

$y_1(0) = y_2(0) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; y_1 - y_2 - \sin x = 0.$

Вариант 2

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) =$\int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2\right)dx$;$y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2)$ = sh1, $y_2 (\pi/2)$ = -sh1.
2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^1 \left(y_1'^2 + 2y_1'^2 + y_2^2\right)dx$;

$y_1(0) = -2, y_2(0) = 1, y_1(1) = -e^{-1}, y_2(1) = 0; y_1 - y_2' = 0$

Вариант 3

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y_1' y_2' - y_1y_2\right)dx$;$y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2 (\pi/2) = -1$.
2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1)dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2; y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$

Вариант 4

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2)dx$;$y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e$, y_2 (1) = 1/*e*.

2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^\pi (y_1'^2 - y_2'^2)dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}; y_1' - y_2 + \cos x = 0$

Вариант 5

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) =$\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1)dx$;$y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1(1) = 3/2$, y_2 (1) = 1.

2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^\pi y \sin x \, dx$;

$y(0) = 0,\ y(\pi) = \pi;\ \int_0^\pi y'^2 dx = \frac{3}{2}\pi$

Вариант 6

1. Найти экстремаль функционала

J (y_1, y_2) = $\int_0^\pi (y_1'^2 - y_2'^2 + 2y_1' y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2)dx$; $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = y_2(\pi)=0$,

$y_1(\pi) =1+\pi$.

2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^1 (y'^2 + y^2)\, dx$;

$y(0) = 0,\ y(1) = e^{-1}; \int_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2})$

Вариант 7

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$; y(0) = 0; $y(x_1) = \frac{1}{1-x_1{}^2}$.

2. Найти экстремаль функционала J(y_1, y_2)= $\int_0^1 y_1' y_2' dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, y_2(1) = 1; \int_0^1 y_1 dx = 1, \int_0^1 y_2 dx = 0$

Вариант 8

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^{2}dx}$; $y(x_0)=x_0^2, y(x_1)=x_1-5$

2. Найти экстремаль функционала J(y_1, y_2)= $\int_0^1 (y_1+y_2)dx$;
$y_1(0)=y_2(0)=0, y_1(1)=1, y_2(1)=-3; \int_0^1 y_1' y_2' dx = 0$

Вариант 9

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{x_1} y'^2 dx$; y(0) = 0; y(x_1) = -x_1-1

2. Найти экстремаль функционалаJ(y_1, y_2)= $\int_0^1 (y_1'^2+y_2'^2)dx$;
$y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0= \ y_2(1)=0; \int_0^1 y_1 y_2 dx = -2$

Вариант 10

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) =$\int_0^1 \left(y_1'^2+y_2'^2+2y_1\right)dx$;y_1(0) = y_2(0) = 1, y_1(1) = 3/2, y_2 (1) = 1.

2. Найти экстремаль функционала J(y_1, y_2)= $\int_0^1 x(y_1-y_2)dx$;
$y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0, y_1(1)=2; \int_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}$

Вариант 11

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx$; y(0) = 0.
2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_a^b \left(y_1+y_2+y_2'\right)dx$;
   $y_1(a)=y_1^{(0)}, y_2(a)=y_2^{(0)}, y_1(b)=y_1^{(1)}, y_2(b)=y_2^{(1)}; y_1'+y_2'-1=0$

Вариант 12

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$; y(0) = 1, y($x_1$)=$x_1$-1.
2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^3 \ 4y'^2y^2dx+y^4(0)-8y(3)$

Вариант 13

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y'^2 - y^2 + 4y\cos x)dx$; y(0) = 0.
2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2 - y^2)dx + y^2(0) - y^2(\frac{\pi}{2}) + 4y(\frac{\pi}{2})$

Вариант 14

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{x_1}(y'^2 + y^2)dx$; y(0) = 0, y($x_1$) = 1.
2. Найти экстремаль функционала
   J(y)=$\int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y\sin x)dx + 2y^2(0) + 2y(\pi)$ - $y^2(\pi)$

Вариант 15

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{1/2} (y - y'^2)dx$; y(0) = 0.
2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1)\,dx$;
   $$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2;\ y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$$

Вариант 16

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^1 \left(y_1'y_2' + 6xy_1 + 12x^2y_2\right)dx$;y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = y_2 (1) = 1.
2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y'^2 - y^2 + 4y\cos x)dx$; y(0) = 0.

Вариант 17

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_1^3 \left(xy_1'^2 + xy_1 y_2 \right) dx$;$y_1(1) = 1$, $y_2(1) = y_3(3)=0$, $y_1(3) = \ln 3 +$

1.

2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^1 \; y'^2 dx + y^2(0) - 2y^2(1)$

Вариант 18

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 \right) dx - 2sh\,1\, y(1)$.

2. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^1 \; y'^2 dx$;

$y(0) = y(1) = 0; \int_0^1 \, ydx = 0, \int_0^1 \, xydx = 0$

Вариант 19

1. Найти экстремаль функционала J(y)= $\int_0^e (2y'(xy' + y)dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e)$.

2. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2)\, dx$;

$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1; y_1' + y_2' - 4x = 0$

Вариант 20

1. Найти экстремаль функционала J (y_1, y_2) =$\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 \;\; + 2ye^x \;\; \right) dx$;y (0) =0, y(1) = 1/2e.

2. Найти экстремаль функционала J(y_1, y_2)= $\int_0^1 \; (y_1'^2 + y_2'^2)\, dx$;

$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0 = \; y_2(1) = 0; \int_0^1 \, y_1 y_2 dx = -2$