

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФИЗИКО - ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
дифференциальных уравнений  
протокол № 8 от «17» апреля 2020 г.

зав. кафедрой  /Юмагулов М.Г.

Согласовано:  
Председатель УМК ФТИ

 /Балапанов М.Х.

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

дисциплина Дифференциальные уравнения  
(наименование дисциплины)

**Базовая часть**


(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))

**Программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)  
03.03.01 Прикладная математика и физика

Направленность (профиль) подготовки  
**Моделирование физических процессов и технологий**

Квалификация  
**бакалавр**

|   |   |
|---|---|
| <p>Разработчик (составитель)<br/>доцент, к.ф.-м.н.<br/>(должность, ученая степень, ученое звание)</p> | <p> / Сагитова А.Р.<br/>(подпись, Фамилия И.О.)</p> |
|---|---|

Для приема: 2020

Уфа 2020 г.

Составитель: к.ф.м.н, доцент Сагитова А.Р.

## Список документов и материалов

|  |    |
|--|----|
| 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций  | 4  |
| 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы   | 4  |
| 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)  | 4  |
| 4. Фонд оценочных средств по дисциплине  |    |
| 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.  | 5  |
| 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине. | 6  |
| 4.3. Рейтинг-план дисциплины   | 6  |
| 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины   |    |
| 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины  | 22 |
| 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины  | 22 |
| 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине   | 24 |

# 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

| Категория (группа) компетенций <sup>1</sup> (при наличии ОПК) | Формируемая компетенция (с указанием кода)   | Код и наименование индикатора достижения компетенции  | Результаты обучения по дисциплине  |
|---|--|---|--|
|   | ОПК-1 - способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности. | ОПК-1.1<br><u>Знать:</u> понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения, интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые; задача Коши; существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши; различные типы дифференциальных уравнений первого порядка; дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, линейные уравнения однородные и неоднородные; понятие линейной зависимости и независимости решений; фундаментальная система решений, определитель Вронского; линейные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; системы обыкновенных дифференциальных уравнений; нормальные системы; автономные системы; формула Остроградского – Лиувилля; краевая задача; | <u>Знать:</u> понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения, интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые; задача Коши; существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши; различные типы дифференциальных уравнений первого порядка; дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, линейные уравнения однородные и неоднородные; понятие линейной зависимости и независимости решений; фундаментальная система решений, определитель Вронского; линейные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; системы обыкновенных дифференциальных уравнений; нормальные системы; автономные системы; формула Остроградского – Лиувилля; краевая задача; функция Грина; понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и |

<sup>1</sup> Указывается только для УК и ОПК (при наличии).

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
|  |  | <p>функция Грина; понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости; функции Ляпунова; устойчивость по первому приближению; фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами; особые точки: седло, узел, фокус, центр; Устойчивость по второму приближению, функция Ляпунова; Критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p>  | <p>экспоненциальной устойчивости; функции Ляпунова; устойчивость по первому приближению; фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами; особые точки: седло, узел, фокус, центр; Устойчивость по второму приближению, функция Ляпунова; Критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p>   |
|  |  | <p>ОПК-1.2<br/> <u>Уметь</u> решать различные дифференциальные уравнения первого порядка; делать математические постановки; решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка и линейные уравнения любого порядка, используя метод вариации произвольной постоянной и метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; решать краевые задачи; решать системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом исключения, интегрируемых комбинаций и с помощью матричной экспоненты; исследовать зависимость и независимость системы функций по определению и через определитель Вронского; исследовать устойчивости по Ляпунову решения линейной системы дифференциальных уравнений, не линейной системы по первому приближению и с помощью функции Ляпунова, критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p> | <p><u>Уметь</u> решать различные дифференциальные уравнения первого порядка; делать математические постановки; решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка и линейные уравнения любого порядка, используя метод вариации произвольной постоянной и метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; решать краевые задачи; решать системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом исключения, интегрируемых комбинаций и с помощью матричной экспоненты; исследовать зависимость и независимость системы функций по определению и через определитель Вронского; исследовать устойчивости по Ляпунову решения линейной системы дифференциальных уравнений, не линейной системы по первому приближению и с помощью функции Ляпунова, критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p> |

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
|  |  | <p><i>ОПК–1.3</i><br/> <u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</p>   | <p><u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</p>  |
|  | <p><i>ОПК-3</i><br/>         - способность понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.</p> | <p><i>ОПК-3.1</i><br/> <u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнения; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки.</p>   | <p><u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнения; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки.</p>  |
|  |  | <p><i>ОПК-3.2</i><br/> <u>Уметь:</u> решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма-Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.</p> | <p><u>Уметь:</u> решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.</p> |
|  |  | <p><i>ОПК-3.3</i><br/> <u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.</p>  | <p><u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.</p>   |

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы .

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» является базовой дисциплиной в цикле Б1 Дисциплины (модули). Она изучается на 2 курсе в 3 семестре.

Целями освоения дисциплины (модуля) «Дифференциальные уравнения» являются:

- сформировать у будущих специалистов современные теоретические знания в области теории линейных интегральных операторов и линейных функционалов, практические навыки в решении и исследовании основных типов уравнений и краевых задач, связанных с ними,
- ознакомить студентов с соответствующими приложениями этой теории в математической физике.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» логически и содержательно-методически тесно связана с такими дисциплинами как «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» и «Линейные и нелинейные уравнения физики». Процесс изучения дисциплины опирается на знания, полученные при изучении курсов «Математического анализа» и «Линейной алгебры». Знания, полученные в результате освоения курса «Дифференциальные уравнения» позволяют применять соответствующие методы при решении задач «Линейных и нелинейных уравнений физики» и «Интегральных уравнений и вариационного исчисления»

Изучение дисциплины является одним из необходимых элементов подготовки специалистов по данному направлению.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «линейная алгебра». Освоение дисциплины «Дифференциальные уравнения» необходимо при последующем изучении дисциплин «Уравнения в частных производных» «Дифференциальная геометрия и топология» и ряда других.

## 3.Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в *Приложение № 1*.

## 4.Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции **ОПК-2** - способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности.

| Код и наименование индикатора достижения | Результаты обучения по дисциплине | Критерии оценивания результатов обучения |                          |               |                |
|--|-----------------------------------|--|--------------------------|---------------|----------------|
|  |                                   | 2<br>«Не удовлетворительно»              | 3<br>«Удовлетворительно» | 4<br>«Хорошо» | 5<br>«Отлично» |
|  |                                   |  |                          |               |                |

| компетенции |   |   |  |   |  |
|-------------|---|---|--|---|--|
| ОПК–2.1     | <p><u>Знать</u>: понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения, интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые; задача Коши; существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши; различные типы дифференциальных уравнений первого порядка; дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, линейные уравнения однородные и неоднородные; понятие линейной зависимости и независимости решений; фундаментальная система решений, определитель Вронского; линейные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; системы обыкновенных дифференциальных уравнений; нормальные системы; автономные системы; формула Остроградского – Лиувилля; краевая задача; функция Грина; понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости; функции Ляпунова; устойчивость по первому приближению; фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами; особые точки: седло, узел, фокус, центр; Устойчивость по второму приближению, функция Ляпунова; Критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p> | Имеет частичные знания об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений»  | В целом знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений».   | Знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений», но допускает незначительные ошибки.  | Знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений».   |
| ОПК–2.2     | <p><u>Уметь</u> решать различные дифференциальные уравнения первого порядка; делать математические постановки; решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка и линейные уравнения любого порядка, используя метод вариации произвольной постоянной и метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; решать краевые задачи; решать системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом исключения,</p>   | Не показывает сформированные умения в решении задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения | Умеет частично Решать задачи по дисциплине «Дифференциальные уравнения» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач. Не в полной мере | Показывает в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование методов решения задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения». Применяет физические законы для решения задач. | Успешное и систематическое применение методов решения задач «Дифференциальных уравнений». Анализирует и применяет физические законы для решения задач. |



|         |   |   |  |  |  |
|---------|---|---|--|--|--|
|         | <i>интегрируемых комбинаций и с помощью матричной экспоненты; исследовать зависимость и независимость системы функций по определению и через определитель Вронского; исследовать устойчивости по Ляпунову решения линейной системы дифференциальных уравнений, не линейной системы по первому приближению и с помощью функции Ляпунова, критерий Гурвица; критерий Михайлова.</i> | задач.  | применяет физические законы для решения задач  |  |  |
| ОПК–2.3 | <i>Владеть: способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</i>  | Фрагментарно владеет навыкам и методами «Дифференциальных уравнений». | В целом успешное, но не систематически применяет навыки и методами «Дифференциальных уравнений». | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков и методов «Дифференциальных уравнений». | Владеет в полной мере методами «Дифференциальных уравнений». |

Код и формулировка компетенции **ОПК-3** способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.

| Код и наименование индикатора достижения компетенции | Результаты обучения по дисциплине  | Критерии оценивания результатов обучения   |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  | 2<br>«Не удовлетворительно»  | 3<br>«Удовлетворительно»   | 4<br>«Хорошо»  | 5<br>«Отлично»   |
| ОПК–3.1  | <i>Знать: естественнонаучную сущность понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнения; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки.</i> | Имеет частичные знания об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений» | В целом знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений». | Знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений», но допускает незначительные ошибки. | Знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений». |
| ОПК–3.2  | <i>Уметь: решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и</i>   | Не показывает сформированные умения в  | Умеет частично Решать задачи по дисциплине                                 | Показывает в целом успешное, но содержащее отдельные   | Успешное и систематическое применение методов                      |

|         |   |   |   |  |  |
|---------|---|---|---|--|--|
|         | <i>Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.</i> | решении задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения»<br>Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач. | «Дифференциальные уравнения»<br>Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач.<br>Не в полной мере применяет физические законы для решения задач | пробелы использование методов решения задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения». Применяет физические законы для решения задач. | решения задач «Дифференциальных уравнений». Анализирует и применяет физические законы для решения задач. |
| ОПК–3.3 | <i><u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.</i>  | Фрагментарно владеет навыками и методами «Дифференциальных уравнений».  | В целом успешное, но не систематически применяет навыки и методами «Дифференциальных уравнений».  | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков и методов «Дифференциальных уравнений».                           | Владеет в полной мере методами «Дифференциальных уравнений».   |

Показатели сформированности компетенции:

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

| Код и наименование индикатора достижения компетенции | Результаты обучения по дисциплине | Оценочные средства |
|--|-----------------------------------|--------------------|
|--|-----------------------------------|--------------------|

|                |   |  |
|----------------|---|--|
|                |   |  |
| <i>ОПК-2.1</i> | <p><u>Знать:</u> понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения, интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые; задача Коши; существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши; различные типы дифференциальных уравнений первого порядка; дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, линейные уравнения однородные и неоднородные; понятие линейной зависимости и независимости решений; фундаментальная система решений, определитель Вронского; линейные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; системы обыкновенных дифференциальных уравнений; нормальные системы; автономные системы; формула Остроградского – Лиувилля; краевая задача; функция Грина; понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости; функции Ляпунова; устойчивость по первому приближению; фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами; особые точки: седло, узел, фокус, центр; Устойчивость по второму приближению, функция Ляпунова; Критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p> | <p>Устный опрос,<br/>Контрольная работа</p> <p>№1,<br/>Тест №1</p> |
| <i>ОПК-3.1</i> | <p><u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнения; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки.</p>   | <p>№1,<br/>Тест №1</p>   |
| <i>ОПК-2.2</i> | <p><u>Уметь</u> решать различные дифференциальные уравнения первого порядка; делать математические постановки; решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка и линейные уравнения любого порядка, используя метод вариации произвольной постоянной и метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида; решать краевые задачи; решать системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом исключения, интегрируемых комбинаций и с помощью матричной экспоненты; исследовать зависимость и независимость системы функций по определению и через определитель Вронского; исследовать устойчивости по Ляпунову решения линейной системы дифференциальных уравнений, не линейной системы по первому приближению и с помощью функции Ляпунова, критерий Гурвица; критерий Михайлова.</p>  | <p>Устный опрос,<br/>контрольная работа<br/>№2,<br/>Тест № 2</p>   |
| <i>ОПК-3.2</i> | <p><u>Уметь:</u> применять математический аппарат для решения дифференциальные уравнения различного порядка; математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.</p>  | <p>Устный опрос,<br/>контрольная работа<br/>№2,<br/>Тест № 2</p>   |
| <i>ОПК-2.3</i> | <p><u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</p>   | <p>Контрольная работа<br/>№ 3<br/>Тест №3<br/>Экзамен</p>          |

|         |  |  |
|---------|--|--|
| ОПК-3.3 | Владеть навыками приобретать опыт решения профессиональных задач; навыками критического осмысления приобретенных знаний и умений для смены направления деятельности. | Контрольная работа № 3<br>Тест №3<br>Экзамен |
|---------|--|--|

Текущая, промежуточная и итоговая аттестация проводится по модульно-рейтинговой системе согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов.

**Текущий контроль** – это контроль над всеми видами аудиторной и внеаудиторной работы студентов по данному дисциплинарному модулю, результаты которой оцениваются до рубежного контроля.

Текущий контроль по теоретическому материалу модуля (лекционному и материалу самостоятельного изучения) проводится в форме тестового опроса или в виде письменного блиц-опроса по вопросам, требующим краткого ответа. Это основные определения, вопросы на понимание алгоритмов. Каждый вопрос оценивается как часть от максимального балла, назначенного на данный текущий контроль. В зависимости от объема модуля проводится 1-2 текущих контроля.

**Рубежный контроль** – проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом.

Рубежный контроль проводится в форме тестового опроса или в виде письменного блиц-опроса по 5 вопросам, требующим краткого ответа. Каждый вопрос оценивается как часть от максимального балла, назначенного на рубежный контроль. Вопросы охватывают материал целого модуля и также включают темы лекционных занятий и самостоятельной работы. А так же в виде итоговой контрольной работы.

По результатам суммарного текущего контроля по всем видам учебной деятельности и рубежного контроля выставляется промежуточный контроль.

**Итоговый контроль** – форма контроля, проводимая по завершении изучения дисциплины в семестре.

Итоговый контроль проводится в форме экзамена по теоретическому и практическому материалам.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Дифференциальные уравнения первого порядка, общее решение и начальные условия. Задача Коши.

1. Проверьте, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции:

$$1) xy' = 2y, y = 5x^2;$$

$$2) y'' = x^2 + y^2, y = \frac{1}{x};$$

2. Составьте дифференциальные уравнения заданных семейств кривых:

$$1) y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}; \quad x^2 + y^2 = C;$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения.

Найдите общие или частные решения следующих дифференциальных уравнений:

- 1)  $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$  2)  $xuy' = 1 - x^2$ ; 3)  $y' = -y\sin x$ ;  
4)  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$ ; 5)  $(x + 2y)dx - xdx = 0$ , 6)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ ;

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

Найдите общие решения следующих дифференциальных уравнений:

- 1)  $xy' - 2y = x^3 \cos x$ ; 2)  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ ; 3)  $y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x}$ ;  
4)  $xy' + y = y^2 \ln x$ ; 5)  $2x \cos^2 y dy + (2y - x \sin 2y) dx = 0$ ;

Дифференциальные уравнения второго порядка, их общие решения и начальные условия.

Задача Коши. Понижение порядка дифференциального уравнения.

Найдите общие или частные решения следующих дифференциальных уравнений:

- 1)  $2y'' + x^3 = -1$ ;  
2)  $y''' = \sin x + \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$ ;  
3)  $y'' = \ln x$ .

Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найдите общие или частные решения дифференциальных уравнений 2-го порядка:

- 1)  $y'' + y' - 2y = 0$ ; 2)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ ;  
3)  $y'' - 2y' - 3y = 0$ ; 4)  $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$ .

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найдите общие или частные решения дифференциальных уравнений 2-го порядка:

- 1)  $y'' + 4y' + 5y = x^2 + 3x - 1, y(0) = 1, y'(0) = 0$ ;  
2)  $y'' + 3y' = xe^x$ ;  
3)  $y'' + 2y' + y = \sin x$ ;  
4)  $y'' - 3y' + 2y = \cos x; y(0) = 0; y'(0) = 1$ .

Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Решите следующие системы дифференциальных уравнений:

- 1) 
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} + y + 3z = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x \\ \frac{dz}{dx} - y - z = x \end{cases}; y(0) = 0, z(0) = 0.$$

Простейшие дифференциальные уравнения в частных производных. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных. Типы уравнений второго порядка в частных производных.

1. Найдите функцию  $z=z(x,y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{dx} = 1.$$

2. Решите уравнение:  $\frac{d^2 z}{dy^2} = 6y$ , где  $z = z(x, y)$ ;

3. Найдите общий интеграл уравнения:

$$1) x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = z; \quad 2) (x^2 + y^2) \frac{dz}{dx} + 2xy \frac{dz}{dy} = 0.$$

Устойчивость по Ляпунову. Фазовые траектории.

1. Исследовать на устойчивость решения следующих задач.

a)  $x' = 4x - t^3 x, x(0) = 0,$

b)  $2tx' = x - x^3, x(0) = 0.$

2. Исследовать на устойчивость и на асимптотическую устойчивость тривиальное решение системы, общее решение которой имеет вид

$$x = C_1 \sin^2 t - C_2 e^{-t},$$

$$y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$$

3. Исследовать на устойчивость тривиальное решение следующих автономных систем уравнений:

a)  $x' = e^{x+2y} - \cos 3x, y' = \sqrt{4+8x} - 2e^y,$

b)  $x' = tg(z-y) + 2x, y' = \sqrt{9+12x} - 3e^y, z' = -3y;$

4. Пользуясь функцией Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальные решения следующих систем:

a)  $x' = 2y^3 - x^5, y' = -x - y^3 + y^5,$

b)  $x' = y - 2x - (1+t^2)x^3, y' = 6x - 4y.$

5. Исследовать расположение траекторий на фазовой плоскости и установить тип точки покоя:

a)  $x_1' = 3x_1 + 4x_2, x_2' = 2x_1 + x_2.$

b)  $x_1' = 2x_1, x_2' = x_1 + x_2.$

c)  $x_1' = x_1 - 2x_2, x_2' = 4x_1 - 3x_2.$

### СПИСОК ВОПРОСОВ.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общие понятия. (Общее и частное решение, задача Коши, геометрический смысл.)
2. Уравнение с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения приводящиеся к однородным.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной.
5. Уравнение Бернулли. Подстановка Бернулли. Уравнение Риккати.
6. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Линейные нормированные пространства. Принцип сжимающих отображений.
8. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.
9. Метод последовательных приближений.
10. Продолжение решения задачи Коши.
11. Уравнения не разрешенные относительно производной. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши.
12. Уравнения Клеро и Лагранжа.
13. Особые решения.
14. Огибающая однопараметрического семейства кривых.
15. Уравнения  $n$ -го порядка. Общее решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
16. Некоторые интегрируемые типы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка. Уравнения допускающие понижения порядка.
17. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Теорема существования и единственности задачи Коши. Линейный оператор.
18. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Свойства решений.
19. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Необходимое условие зависимости системы функций. Определитель Вронского.
20. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
21. Структура общего решения линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка. Фундаментальная система решений.
22. Определение линейного однородного дифференциального уравнения по его фундаментальной системе. Формула Лиувилля-Остроградского.
23. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Случай простых действительных и комплексных корней.
24. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Случай кратных корней.
25. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Структура общего решения.
26. Метод вариации произвольных постоянных.
27. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Подбор частного решения под правую часть уравнения методом неопределенных коэффициентов.
28. Краевые задачи. Функция Грина. Задача о собственных значениях и собственных функциях.
29. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Общее решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности.
30. Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод исключения.
31. Метод интегрируемых комбинаций.
32. Системы линейных дифференциальных уравнений. Свойства решений. Структура общего решения однородной и неоднородной системы.
33. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.
34. Системы линейных неоднородных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.

35. Непрерывная зависимость решений от начальных данных.
36. Устойчивость по Ляпунову (определение устойчивости и асимптотической устойчивости).
37. Простейшие типы точек покоя. Фазовая плоскость. Фазовые траектории.
38. Устойчивость по первому приближению. Теорема Ляпунова.
39. Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова.

### Контрольно-оценочные материалы.

#### Контрольная работа №1.

1. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$xy' - y = xtg \frac{y}{x} .$$

2. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$x^2 y' + xy + 1 = 0 .$$

3. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y' + 2y = y^2 e^x .$$

4. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$xy'' - y' = x^2 .$$

5. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$2yy'' = (y')^2 .$$

*Критерии оценок в баллах:*

*Каждый решенный пункт 1-3 оценивается в 2 балла, 4,5 в 3 балла, не решенный 0 баллов, максимальное количество баллов - 12.*

#### Контрольная работа №2.

1. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' - 4y' + 13y = 0 .$$

2. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$9y'' - 6y' + y = 0 .$$

3. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' - 2y - 3y = 0 .$$

4. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.



$$y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

5. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' - 2y' - 3y = \cos x.$$

*Критерии оценок в баллах:*

*Каждый решенный пункт 1-3 оценивается в 2 балла, 4,5 в 3 балла, не решенный 0 баллов, максимальное количество баллов 12.*

### Контрольная работа № 3.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = x - 4y + 3e^{2t}, & x(1) = x_0, \\ y' = -x + y, & y(1) = y_0. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость тривиальное решение автономной системы уравнений:

$$x' = e^{x+y} - 1 + 2xy, y' = 2\sin x + y^2;$$

5. Исследовать расположение траекторий на фазовой плоскости и установить тип точки покоя:

$$x' = 2x - y, y' = x.$$

*Критерии оценок в баллах:*

*Каждый решенный пункт 1,2 оценивается в 3 балла, пункт 3 в 6 баллов, 4,5 в 2 балла, не решенный 0 баллов, максимальное количество баллов – 16.*

### ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

#### Тест рубежного контроля к модулю 1

1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое неизвестная функция входит
  - 1) под знаком интеграла;
  - 2) под знаком производной или дифференциала;
  - 3) под знаком логарифма;
  - 4) в неявном виде;

2. Решением дифференциального уравнения  $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$  называется функция  $y = y(x)$  если она
- 1) удовлетворяет начальным условиям;
  - 2)  $n$  раз дифференцируема на промежутке  $I$ ;
  - 3) монотонна на промежутке  $I$ ;
  - 4) обращает при подстановке уравнение в тождество;
3. Общим интегралом дифференциального уравнения  $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$  является семейство функций вида
- 1)  $\varphi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$
  - 2)  $y = \varphi(x, c)$
  - 3)  $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$
  - 4)  $y = c_1 \varphi(x) + c_2$
4. Задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , формулируют следующим образом (укажите правильные варианты ответа):
- 1) Найти решение  $y(x)$  такое, что  $y(x_0) = y_0$ ;
  - 2) Найти решение  $y(x)$  такое, что  $y(x_0) = f(x_0, y_0)$ ;
  - 3) Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку  $(x_0, y_0)$ ;
  - 4) Найти семейство интегральных кривых вида  $y = \varphi(x, c)$ ;
5. Для приближенного построения интегральных кривых используется метод
- 1) изотерм;
  - 2) Эйлера;
  - 3) неопределенных коэффициентов;
  - 4) изоклин;
6. Уравнение семейства изоклин для дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$  имеет вид:
- 1)  $y = kx$ ;
  - 2)  $x^2 + y^2 = k, k \geq 0$ ;
  - 3)  $y = kx + b$ ;
  - 4)  $y = kx^2$ ;
7. Выбрать решение дифференциального уравнения  $(x + 1) dy + xy dx = 0$  среди предложенных функций:
- 1)  $y = (x + 1) e^{-x}$
  - 2)  $y = (x + 1) e^x$
  - 3)  $y = (x - 1) e^x$
  - 4)  $y = (x - 1) e^{-x}$
8. Уравнениями с разделяющимися переменными являются уравнения вида:
- 1)  $f(y) dy = g(x) dx$
  - 2)  $y' = f(x, y)$
  - 3)  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
  - 4)  $y' = g(x) p(y)$
9. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y' = f(x, y)$$

$$f(x)dx = g(y)dy$$

$$ay' + by + c = 0$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

10. К однородным дифференциальным уравнениям можно привести уравнения вида

$$y' = f(x, y), \text{ если } f(kx, ky) = f(x, y)$$

$$y' = f(ax + bx + c), \text{ где } a, b, c - \text{ постоянные числа}$$

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0, \text{ если } P(kx, ky) = k^n P(x, y), Q(kx, ky) = k^n Q(x, y)$$

$$y' + p(x) = f(x)y^\alpha, \text{ где } \alpha \neq 0; 1$$

*Критерии оценок в баллах:*

*Каждый вопрос – 1 балл*

### Тест рубежного контроля к модулю 2

1. Указать верную замену для решения уравнения  $y \cdot y'' = y^2 \cdot y' + (y')^2$

1)  $y' = p(x), y'' = p'(x)$

2)  $y' = p(y), y'' = p'_y \cdot p(y)$

3)  $p = \frac{y}{x}$

4)  $p = y \cdot y'$

5) верный ответ отсутствует

2. Указать уравнения, допускающие понижение порядка:

1)  $y'' = 3x^2 + 5$

2)  $y' = 2x + y$

3)  $y'' - 3y' + 2y = e^x$

4)  $y'' = y \cdot (y')^2$

5)  $y'' + 3y' = 2x$

6)  $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y \cdot (y')^2$

3. Уравнение  $x^2 y'' = (y')^2$  сводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка заменой:

1)  $y' = p(x), y'' = p'(x)$

2)  $y' = p(y), y'' = p'_y \cdot p(y)$

3)  $p = \frac{y}{x}$

4) верный ответ отсутствует

5)  $p = (y')^2$

4. Установить соответствие между дифференциальным уравнением 2-го порядка и типом дифференциального уравнения, полученного после понижения порядка:

1  $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}$

1 С разделяющимися переменными

2  $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$

2 однородной

- 3  $y \cdot y'' + (y')^3 = (y')^2$  3 линейное  
 4 4 Уравнение Бернулли  
 5 5 Уравнение в полных дифференциалах

6. Указать общее решение уравнения  $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$ :

- 1)  $4C_1y = 4 - (C_1x + C_2)^2$   
 2)  $C_1y = 4 + (C_1x + C_2)^2$   
 3)  $4C_1y = 4 + (C_1x + C_2)^2$   
 4) верный ответ отсутствует  
 5)  $C_1y = 4 - (C_1x + C_2)^2$

6. Указать линейные дифференциальные уравнения:

- 1)  $y'' + 2y' + 3y = 4x$   
 2)  $y \cdot y'' = (y')^2$   
 3)  $2y \cdot (y')^3 + y'' = 0$   
 4)  $x^2y'' + 2xy' + y = 0$   
 5)  $y'' = 9y$

7. Для нижеприведенных систем функций указать порядок увеличения значения

соответствующего определителя Вронского  $\Delta = W[y_1, y_2]$ :

- 1  $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$   
 2  $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$   
 3  $y_1 = 2 \cos x, y_2 = 2 \sin x$   
 4  $y_1 = 2, y_2 = x - 2$

8. Среди приведенных систем указать задачу Коши:

- 1  $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$   
 2  $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$   
 3  $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = -1 \end{cases}$   
 4  $\begin{cases} y''' - 5y'' + 4y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

5 верный ответ отсутствует

9. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка

$9y''' - y' = 0$ . Корнями его характеристического уравнения являются ...

Укажите ответы:

$\lambda_1 =$

$\lambda_2 =$

$\lambda_3 =$

10. По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения  $y'' + 25y = \operatorname{tg} 5x$  следует искать в виде ...

*Критерии оценок в баллах:*

*Каждый вопрос – 1 балл*

### Тест рубежного контроля к модулю 3

1. Фундаментальной системе решений  $\{1, x, x^2\}$  соответствует дифференциальное уравнение:

1)  $y''' = 0$ ;

2)  $y''' - 3y'' + 2y' + y = 0$ ;

3)  $y''' - 3y'' + 3y' + y = 0$ ;

4)  $y''' + y'' + y' = 0$ ;

5) другой ответ

2. Общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -5x - 6y, \\ y' = 8x + 9y \end{cases}$$

1)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ ;

2)  $y = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ ;

3)  $x = -C_1 e^t - 3C_2 e^{3t}; y = C_1 e^t + 4C_2 e^{3t}$ ;

4)  $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}; y = C_3 e^t + C_4 e^{3t}$ ;

3. Определить устойчивость нулевого решения следующей системы

$$\begin{cases} x' = x^3 - y, \\ y' = x + y^3. \end{cases}$$

4. Исследовать особую точку  $x = 0, y = 0$  системы

$$x' = 2x, y' = x + y$$

1) Узел

2) Седло

3) Фокус

4) Центр

5. Исследовать особую точку уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y, \frac{dy}{dt} = 4x - 3y;$$

1) Узел

2) Седло

3) Фокус

4) Центр

6. Сформулировать теорему об общем решении линейной однородной системы
7. Что называется общим решением линейного неоднородного уравнения?
8. Сформулировать основные свойства детерминанта Вронского.
9. Дать определение фундаментальной матрицы.
10. Написать фундаментальную матрицу для системы  $x' = y, y' = 0$ .

*Критерии оценок в баллах:*  
*Каждый вопрос – 1 балл*

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Структура экзаменационного билета:

1-8 вопросы тестовые (0-0,5 балла каждый), 9-13 практические (0-4 балла каждый), 14-16 теоретические (0-2 балла каждый).

Образец экзаменационного билета:

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
 УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
 «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
 ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
 КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Экзаменационный билет №1  
 по курсу «Дифференциальные уравнения»**

Определение дифференциального уравнения, общего и частного решения.

2. Уравнение семейства изоклин для дифференциального уравнения  $dy/dx = y/x^2$  имеет вид: 1)  $y = kx$ ,

2)  $x^2 + y^2 = k, k \geq 0$ , 3)  $y = kx + b$ , 4)  $y = kx^2$ .

3. Определить типы дифференциальных уравнений и привести соответствующие определения

1)  $3xy' - 2y = x^3/y^2$ , 2)  $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$ , 3) 4)  $xy' + y = \ln x$ , 5)  $y^2 + xy' = xyu'$ , 6)

$(2x^3 - x \cos y)dx + (2 + x \sin y)dy = 0$ , 7)  $y = xy' - x^2 y'^3$ .

4. Указать верную замену для решения уравнения  $x = y'' + 1$

1)  $y' = p(x), y'' = p'(x)$ , 2)  $y' = p(y), y'' = p'_y p(y)$ , 3)  $p = \frac{y}{x}$ , 4)  $p = y''$ .

5. Указать уравнения, допускающие понижение порядка:

1)  $y'' - 1 = 2x$ , 2)  $y' = \operatorname{tg}(2x + 1)$ , 3)  $xy'' - 2y' = 0$ , 4)  $y'' = y(y')^2$ , 5)  $y'' - 3y' + 2y = e^x$ , 6)

$y'' \operatorname{tg} x = y(y')^2$ .

6. Уравнение  $yy'' = (y')^2$  сводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка заменой: 1)

$y' = p(x), y'' = p'(x)$ , 2)  $y' = p(y), y'' = p'_y p(y)$ , 3)  $p = \frac{y}{x}$ , 4)  $y = (y')^2$ .

7. Указать линейные дифференциальные уравнения:

1)  $y''^2 + 2y' + 3y = 4x$ , 2)  $2xy'' = y'$ , 3)  $2x(y')^3 + y'' = 0$ , 4)  $x^2 y'' + 2xy' + y = 0$ , 5)  $y'' = 9y$ ,

6)  $4y'' - 4y' + y = 0$ .

8. Среди данных систем указать задачу Коши

1)  $\begin{cases} y'' - y \sin x = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$  2)  $\begin{cases} y'' - y \sin x = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$  3)  $\begin{cases} y'' - y \sin x = 0, \\ y(0) = 1, y(1) = 0. \end{cases}$  4)  $\begin{cases} y''' - y \sin x = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$  5)  $\begin{cases} y = xy' + y' - y'^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

9. Определить вид частного решения  $L[y] = f(x)$ :

1)  $f(x) = 2x^2 + x, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ , 2)  $f(x) = \sin 2x + \cos x, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ , 3)  $f(x) = xe^x, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ .

10. По методу вариации произвольных постоянных общее решение неоднородного уравнения  $y'' + 25y = \operatorname{tg} 5x$  следует искать в виде ...

11. Общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$\begin{cases} x' = -5x - 6y, \\ y' = 8x + 9y. \end{cases}$  : а) 1)  $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ , 2)  $y = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ , б) 1)  $x = -C_1 e^t - 3C_2 e^{3t}$ , 2)  $y = C_1 e^t + 4C_2 e^{3t}$ , в) 1)  $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ , 2)  $y = C_3 e^t + C_4 e^{3t}$

12. Определить устойчивость нулевого решения следующей системы  $x' = \sin x + y, y' = x + y^3$


13. Исследовать особую точку  $x = 0, y = 0$  системы  $x' = 2x, y' = x + y$  на устойчивость (узел, седло, фокус, центр).

14. Сформулировать теорему об общем решении ЛОДУ (или для систем).

15. Что называется общим решением линейного неоднородного уравнения?

16. Фундаментальной системе решений  $\{1, x, x^2\}$  соответствует дифференциальное уравнение:

1)  $y''' = 0$ , 2)  $y''' - 3y'' + 2y' + y = 0$ , 3)  $y''' - 3y'' + 3y' + y = 0$ , 4)  $y''' + y'' + y' = 0$

Зав. кафедрой Юмагулов М.Г. /  /

### Критерии оценок в баллах

1-8 вопросы тестовые (0-0,5 балла каждый), 9-13 практические (0-4 балла каждый), 14-16 теоретические (0-2 балла каждый).

10-14 баллов – «удовлетворительно»

15-19 баллов – «хорошо»

20-30 баллов – «отлично»

### Критерии оценки итогового контроля

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

### Общие критерии оценки итогового контроля

Студент получает баллы за экзамен согласно бально-рейтинговой системе. Итоговый контроль оценивается максимально в 30 баллов, если студент отвечает правильно на 16 из 16 предложенных вопросов.

Устанавливается следующая градация перевода оценки из многобалльной в четырехбалльную:

Экзамены:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- хорошо – от 60 до 79 баллов,
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов,
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

В случае, если студент сдает какое-либо из контрольных мероприятий позже установленного срока, преподаватель может снизить максимально возможное количество баллов за данный вид контроля на 5% за каждую неделю просрочки.

Посещение лекционных и практических (семинарских, лабораторных) занятий оценивается в суммах до 6 и 10 баллов соответственно, однако эти баллы являются штрафными и вычитаются преподавателем из набранных студентами баллов в ходе текущего и рубежного контроля по следующей схеме:

– за пропуски лекционных занятий

за 25 % пропусков вычитается 1 балл

за 50 % пропусков вычитается 4 балла

за 75 % пропусков вычитается 6 баллов

за 100 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний

– за пропуски практических (семинарских, лабораторных) занятий

за 20 % пропусков вычитается 2 балла

за 40 % пропусков вычитается 5 баллов

за 50 % пропусков вычитается 7 баллов

за 75 % пропусков вычитается 10 баллов

более 75 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний.

Студент, набравший по итогам текущего и рубежного контроля менее 35 возможных баллов или пропустивший более 75 % практических (семинарских, лабораторных) занятий, до экзамена по данной дисциплине не допускается. В этом случае, он изучает неосвоенные им темы, выполняет соответствующие задания на платной основе в сроки, установленные деканатом для ликвидации задолженностей. Баллы, полученные таким образом, прибавляются к количеству баллов, набранных студентом в семестре.

### 4.3. Рейтинг–план дисциплины.

Дифференциальное уравнение

*(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)*

направление подготовки **[03.03.01] Прикладная математика и физика**

курс  2 , семестр  3

| Виды учебной деятельности студентов                      | Балл за конкретное задание | Число заданий за семестр | Баллы       |              |
|--|----------------------------|--------------------------|-------------|--------------|
|  |                            |                          | Минимальный | Максимальный |
| <b>Модуль 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка</b> |                            |                          |             |              |
| <b>Текущий контроль</b>                                  |                            |                          | <b>0</b>    | <b>12</b>    |
| Контрольная работа №1                                    | 1)0-2                      | 5                        | 0           | 12           |



|   |                                  |    |           |            |
|---|----------------------------------|----|-----------|------------|
|   | 2)0-2<br>3)0-2<br>4)0-3<br>5)0-3 |    |           |            |
| <b>Рубежный контроль</b>  |                                  |    | <b>0</b>  | <b>10</b>  |
| Тест №1   | 0-1                              | 10 | 0         | 10         |
| <b>Модуль 2. Дифференциальные уравнения высших порядков</b>       |                                  |    |           |            |
| <b>Текущий контроль</b>   |                                  |    | <b>0</b>  | <b>12</b>  |
| Контрольная работа №2   | 1)0-2                            | 5  | 0         | 12         |
|   | 2)0-2                            |    |           |            |
|   | 3)0-2                            |    |           |            |
|   | 4)0-3                            |    |           |            |
|   | 5)0-3                            |    |           |            |
| <b>Рубежный контроль</b>  |                                  |    | <b>0</b>  | <b>10</b>  |
| Тест №2   | 0-1                              | 10 | 0         | 10         |
| <b>Модуль 3. Системы дифференциальных уравнений. Устойчивость</b> |                                  |    |           |            |
| <b>Текущий контроль</b>   |                                  |    | <b>0</b>  | <b>16</b>  |
| Контрольная работа №3   | 1)0-3                            | 5  | 0         | 16         |
|   | 2)0-3                            |    |           |            |
|   | 3)0-6                            |    |           |            |
|   | 4)0-2                            |    |           |            |
|   | 5)0-2                            |    |           |            |
| <b>Рубежный контроль</b>  |                                  |    | <b>0</b>  | <b>10</b>  |
| Тест №3   | 1                                | 10 | 0         | 10         |
| <b>Посещаемость</b>   |                                  |    |           |            |
| Пропуски лекционных занятий                                       |                                  |    | -6        | 0          |
| Пропуски практических занятий                                     |                                  |    | -10       | 0          |
| <b>Поощрительные баллы</b>  |                                  |    |           |            |
| 1. Своевременное выполнение заданий и активная работа у доски.    |                                  |    | 0         | <b>10</b>  |
| <b>Итоговый контроль</b>  |                                  |    |           |            |
| Экзамен   |                                  |    | <b>35</b> | <b>110</b> |

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

В библиотеке Башкирского государственного университета имеются в наличии следующие издания:

#### Основная литература:

1. Юмагулов, М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения : теория и приложения [Электронный ресурс] / М.Г. Юмагулов. — Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:[https://elib.bashedu.ru/dl/read/Yumagulov\\_Obeknoven.differ.uravneniya\\_Uchebnik\\_2008.pdf](https://elib.bashedu.ru/dl/read/Yumagulov_Obeknoven.differ.uravneniya_Uchebnik_2008.pdf)
2. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В.А. Треногин. - Москва : Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82614>
3. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. - б.м. : б.и., б.г.. - 425 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165>
4. Егоров, А.И. Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.И. Егоров. - Москва : Физматлит, 2013. - 108 с. : ил. - Библиогр.: с. 105. - ISBN 978-5-9221-1489-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275303>

#### **Дополнительная литература:**

5. Рыбаков, К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Практический курс : учебное пособие / К.А. Рыбаков, А.С. Якимова, А.В. Пантелеев. - Москва : Логос, 2010. - 384 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-465-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84753>
6. Гайдомак О.Г., Султанаев Я.Т. Дифференциальные уравнения. : Курс лекций /РИО Башкирского ун-та. – Уфа, 2002.-121с. – аб.2. 80экз.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2000. – аб2., 35 экз.
8. Егоров, А.И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений / А.И. Егоров. - Москва : Физматлит, 2008. - 254 с. - ISBN 978-5-9221-0942-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68444>

#### **5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

1. «Электронная библиотека БашГУ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>

#### **6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для проведения лекционных и практических занятий используется аудиторный фонд физико-технического института.

| Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий   | Вид занятий            | Наименование оборудования, программного обеспечения   |
|---|------------------------|---|
| 1   | 2                      | 3   |
| Большая физическая аудитория 02   | Лекции                 | Доска, компьютер, мультимедийный проектор, экран<br>Программное обеспечение:<br>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 104 от 17.06.2013 г.<br>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 114 от 12.11.2014 г. |
| <i>учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</i><br>аудитории № 322 или № 324 или № 318 (физмат корпус) | Практические занятия   | Доска, мел, сборники задач, калькулятор   |
| Читальный зал №1 (главный корпус, 1 этаж)   | Самостоятельная работа | Научный и учебный фонд, научная периодика, ПК (моноблок) - 3 шт, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 76.   |
| Читальный зал №2 (корпус физмата, 2 этаж)   | Самостоятельная работа | Научный и учебный фонд, научная периодика, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 50.   |
| Читальный зал №4 (корпус биофака, 4 этаж)   | Самостоятельная работа | Научный и учебный фонд, научная периодика, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 60.   |

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Дифференциальные уравнения на 3 семестр

Очная  
форма обучения

| <b>Вид работы</b>  | <b>Объем дисциплины</b> |
|--|-------------------------|
| Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)  | 3/108                   |
| Учебных часов на контактную работу с преподавателем:   | 73,2                    |
| лекций   | 36                      |
| практических/ семинарских  | 36                      |
| лабораторных   |                         |
| других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)(ФКР) | 1,2                     |
| Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)   | 7,8                     |
| Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)  | 27                      |

Форма контроля:  
экзамен 3 семестр

| № п.п.  | Тема и содержание   | Форма изучения материалов:   |    |        |    | Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка) | Задания по самостоятельной работе студентов (СРС)                                   | Форма текущего контроля успеваемости   |
|---|---|--|----|--------|----|--|---|--|
|   |   | лекции, практические семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах) | ЛК | ПР/СЕМ | ЛР |  |   |  |
| 1   | 2   | 3  | 4  | 5      | 6  | 7  | 8   | 9  |
| <b>Модуль 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка</b>    |   |  |    |        |    |  |   |  |
| 1   | <b>Дифференциальные уравнения 1-го порядка.</b><br>Понятие дифференциального уравнения: поле направлений, решения; интегральные кривые, векторное поле; фазовые кривые. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: 1) уравнения с разделяющимися переменными, 2) однородные уравнения, 3) линейное уравнение, 4) уравнение Бернулли, Риккати, 5) уравнение в полных дифференциалах. | 9  | 9  |        | 8  | 1,4,5, доп.<br>3,4   | решение задач [5] №1-6, № 15, №16 (а, б), № 17-20, №30, № 33, №36, № 36, № 37-45;   | Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контр №1 Тест №1 |
| <b>Модуль 2. Дифференциальные уравнения высших порядков</b> |   |  |    |        |    |  |   |  |
| 2   | <b>Дифференциальные уравнения высших порядков:</b><br>1) уравнения, допускающие понижение порядка;<br>2) линейные уравнения любого порядка;<br>3) краевые задачи;<br>4) функции Грина;  | 9  | 9  |        | 8  | 1,4,5, доп.<br>3,4   | решение задач [5] №425, №426, №427, №428, №429, №455, №456, №457, №458, №463, №464, | Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на                            |

|  |  |   |   |  |   |  |  |   |
|--|--|---|---|--|---|--|--|---|
|  | <p>5) теорема существования и единственности решения задачи Коши;</p> <p>6) интервал существования решения линейного уравнения;</p> <p>7) фундаментальная система решений;</p> <p>8) определитель Вронского;</p> <p>9) линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами;</p> <p>10) общее решение линейного неоднородного уравнения;</p> <p>11) метод вариации произвольных постоянных;</p> <p>12) линейные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида.</p> |   |   |  |   | <p>№465, № 466, № 477, №481, №482, № 483, №241, №242, №243, №244, №245, №246, №251, №252, №253, №254, №255, №267, №268, №287,</p> <p>Решение задач №501, №502</p> <p>№511, №512, №513, №514, №515, №516, №549, №550, №551, №552, № 575, №576, №577, №578, № 582, № 583, № 584.</p> | <p>занятиях, Контрольная работа №2 Тест №2</p>   |   |
| <b>Модуль 3. Системы дифференциальных уравнений. Устойчивость.</b> |  |   |   |  |   |  |  |   |
| 3  | <p><b>Системы обыкновенных дифференциальных уравнений :</b></p> <p>1) нормальные системы;</p> <p>2) автономные системы;</p> <p>3) метод исключения;</p> <p>4) первые интегралы;</p> <p>5) фундаментальная система решений;</p> <p>6) определитель Вронского;</p> <p>7) формула Остроградского – Лиувилля;</p> <p>8) линейные системы с постоянными коэффициентами;</p> <p>9) общее решение линейной неоднородной системы</p>   | 9 | 9 |  | 8 | <p>1,4,5, доп.<br/>3,4</p>   | <p>Решение задач: [5] №786, №787, №788, №789, №789, №790, №802, №803, №826, №828, № 829, №830, №846, №847,</p> | <p>Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контрольная работа №3,</p> |

|   |   |           |           |  |             |                    |   |  |
|---|---|-----------|-----------|--|-------------|--------------------|---|--|
|   | уравнений;<br>10) метод вариации произвольных постоянных;<br>11) теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы любого порядка;   |           |           |  |             |                    | №848, №849  |  |
| 4 | <b>Устойчивость:</b><br>1) уравнения в отклонениях;<br>2) определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости;<br>3) линейные уравнения в отклонениях;<br>4) функции Ляпунова;<br>5) достаточные условия асимптотической устойчивости;<br>6) устойчивость по первому приближению;<br>7) фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами;<br>8) особые точки: седло, узел, фокус, центр. | 9         | 9         |  | 10,8        | 1,4,5, доп.<br>3,4 | Решение задач;<br>5]№882, №883, №884,<br>№885,№890,№891,№8<br>94, №899,№900,<br>№907, №908, №914,<br>№915, №916, №925,<br>№ 926, №932,№933,<br>№934, №935 | Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, домашняя контрольная работа №3 Тест №3 |
|   | <b>Всего часов:</b>   | <b>36</b> | <b>36</b> |  | <b>34,8</b> |                    |   |  |

**Примечание 1.** Часы на самостоятельную работу включают время на подготовку к экзамену (контроль).

**Примечание 2.** В таблицу не включено 1.2 часа ФКР (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности во время семестра, подразумевающие контактную работу обучающихся с преподавателем).

