

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФИЗИКО - ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждена:  
на заседании кафедры  
дифференциальных уравнений  
протокол № 8 от «17» апрель 2020 г.

зав. кафедрой  /Юмагулов М.Г.

Согласовано:  
Председатель УМК ФТИ

 / Балапанов М.Х.

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

дисциплина **Интегральные уравнения и вариационное исчисление**  
(наименование дисциплины)

**Базовая часть**


(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))

**Программа бакалавриата**

***Направление подготовки (специальность)***  
**03.03.01 Прикладная математика и физика**

Направленность (профиль) подготовки  
***Моделирование физических процессов и технологий***

Квалификация  
**бакалавр**

<p>Разработчик (составитель) <u>доцент, к.ф.-м.н.</u> (должность, ученая степень, ученое звание)</p>	<p> / Сагитова А.Р. (подпись, Фамилия И.О.)</p>
--	---

Для приема: 2020

Уфа 2020 г.

Составитель: к.ф.м.н, доцент Сагитова А.Р.

### Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	4
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	4
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	
4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.	5
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.	6
4.3. Рейтинг-план дисциплины	6
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	22
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	22
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	24

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций <sup>1</sup> (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
	<p><i>ОПК-2 - способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</i></p>	<p><i>ОПК–2.1</i>  <i><u>Знать:</u> понятие интегрального уравнения, классификация; задача Абеля; существование и единственность решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 2 го рода; понятие резольвенты; уравнение Фредгольма с вырожденным ядром; характеристические числа и собственные функции, их свойства; вполне непрерывные операторы; оператор Фредгольма; альтернатива Фредгольма; уравнения Фредгольма с симметричным ядром; теорема о конечно спектре; теорема Гильбарта-Шмидта; понятие линейного функционала; вариация функционала; понятия близости кривых <math>n - го</math> порядка; сильного и слабого экстремума функционала; вариационной задачи с различного вида границами.</i></p>	<p><i><u>Знать:</u> понятие интегрального уравнения, классификация; задача Абеля; существование и единственность решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 2 го рода; понятие резольвенты; уравнение Фредгольма с вырожденным ядром; характеристические числа и собственные функции, их свойства; вполне непрерывные операторы; оператор Фредгольма; альтернатива Фредгольма; уравнения Фредгольма с симметричным ядром; теорема о конечно спектре; теорема Гильбарта-Шмидта; понятие линейного функционала; вариация функционала; понятия близости кривых <math>n - го</math> порядка; сильного и слабого экстремума функционала; вариационной задачи с различного вида границами.</i></p>
<p><i>ОПК-2.2</i>  <i><u>Уметь:</u> решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;</i></p>		<p><i><u>Уметь:</u> решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом</i></p>	

<sup>1</sup> Указывается только для УК и ОПК (при наличии).

		<p>решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.</p>	<p>последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.</p>
		<p>ОПК–2.3 <u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</p>	<p><u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.</p>
	<p>ОПК-3 - способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.</p>	<p>ОПК- 3.1 <u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий интегрального уравнения, ядра, резольвенты; характеристического числа и собственных функций; вполне непрерывных операторов, понятия близости кривых <math>n</math> – го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; линейного функционала, вариационной задачи с различного вида границами.</p>	<p><u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий интегрального уравнения, ядра, резольвенты; характеристического числа и собственных функций; вполне непрерывных операторов, понятия близости кривых <math>n</math> – го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; линейного функционала, вариационной задачи с различного вида границами.</p>
		<p>ОПК- 3.2 <u>Уметь:</u> применять математический аппарат для решения уравнений Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решения уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решения уравнений Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решения</p>	<p><u>Уметь:</u> применять математический аппарат для решения уравнений Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решения уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решения уравнений Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решения уравнений Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля;</p>

		<p>уравнений Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма-Лиувилля; нахождения вариации линейного функционала; исследования на наличие сильного и слабого экстремума функционалов; решения вариационной задачи с различного вида границами.</p>	<p>нахождения вариации линейного функционала; исследования на наличие сильного и слабого экстремума функционалов; решения вариационной задачи с различного вида границами.</p>
		<p>ОПК- 3.3  <u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.</p>	<p><u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.</p>

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы .

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» является базовой дисциплиной Б1 Дисциплины (модули). Она изучается на 3 курсе в 5 семестре.

Целями освоения дисциплины (модуля) «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» являются:

-сформировать у будущих специалистов современные теоретические знания в области теории линейных интегральных операторов и линейных функционалов, практические навыки в решении и исследовании основных типов уравнений и краевых задач, связанных с ними,  
-ознакомить студентов с соответствующими приложениями этой теории в математической физике.

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» логически и содержательно-методически тесно связана с такими дисциплинами как «Уравнения в частных производных», «Дифференциальные уравнения», «Линейные и нелинейные уравнения математической физики».

Изучение дисциплины является одним из необходимых элементов подготовки специалистов по данному направлению.

## 3.Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в *Приложение № 1*.

## 4.Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции **ОПК-2** способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения	
		«не зачтено»	«зачтено»
<i>ОПК-2.1</i>	<u>Знать:</u> понятие интегрального уравнения, классификация; задача Абеля; существование и единственность решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 2 го рода; понятие резольвенты; уравнение Фредгольма с вырожденным	Не знает, имеет фрагментарное представление об основных понятиях и законах «Интегральных	Знает об основных понятиях и законах «Интегральных уравнений и

	ядром; характеристические числа и собственные функции, их свойства; вполне непрерывные операторы; оператор Фредгольма; альтернатива Фредгольма; уравнения Фредгольма с симметричным ядром; теорема о конечно спектре; теорема Гильбарта-Шмидта; понятие линейного функционала; вариация функционала; понятия близости кривых $n$ -го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; вариационной задачи с различного вида границами.	уравнения и вариационного исчисления»»	вариационного исчисления»», возможно допускает незначительные ошибки.
ОПК–2.2	<u>Уметь</u> : решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма-Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.	Не показывает сформированные умения в решении задач по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач.	Показывает в целом успешное, использование методов решения задач по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление». Применяет физические законы для решения задач.
ОПК–2.3	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Не владеет или фрагментарно владеет навыкам и методами «Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	Владеет в целом методами «Интегральных уравнений и вариационного исчисления».

Код и формулировка компетенции **ОПК -3** –способность понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения	
		«не зачтено»	«зачтено»
ОПК–3.1	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий интегрального уравнения, ядра, резольвенты; характеристического числа и собственных функций; вполне непрерывных операторов, понятия близости кривых $n$ – го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; линейного функционала, вариационной задачи с различного вида границами.	Не знает, имеет фрагментарное представление об основных понятиях и законах «Интегральных уравнений и вариационного исчисления»»	Знает об основных понятиях и законах «Интегральных уравнений и вариационного исчисления»», возможно допускает незначительные ошибки.
ОПК–3.2	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат для решения уравнений Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решения уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го	Не показывает сформированные умения в решении задач по дисциплине	Показывает в целом успешное, использование методов решения задач по дисциплине



	рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решения уравнений Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решения уравнений Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; нахождения вариации линейного функционала; исследования на наличие сильного и слабого экстремума функционалов; решения вариационной задачи с различного вида границами.	«Интегральные уравнения и вариационное исчисление» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач.	«Интегральные уравнения и вариационное исчисление». Применяет физические законы для решения задач.
ОПК–3.3	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.	Не владеет или фрагментарно владеет навыкам и методами «Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	Владеет в целом методами «Интегральных уравнений и вариационного исчисления».

Показатели сформированности компетенции:

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины ( для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),  
не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов.

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-2.1	<u>Знать</u> : понятие интегрального уравнения, классификация; задача Абеля; существование и единственность решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 2 го рода; понятие резольвенты; уравнение Фредгольма с вырожденным ядром; характеристические числа и собственные функции, их свойства; вполне непрерывные операторы; оператор Фредгольма; альтернатива Фредгольма; уравнения Фредгольма с симметричным ядром; теорема о конечно спектре; теорема	Контрольная №1. Домашняя контрольная работа №1.

	Гильбарта- Шмидга; понятие линейного функционала; вариация функционала; понятия близости кривых $n$ – го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; вариационной задачи с различного вида границами.	
ОПК-3.1	<u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий интегрального уравнения, ядра, резольвенты; характеристического числа и собственных функций; вполне непрерывных операторов, понятия близости кривых $n$ – го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; линейного функционала, вариационной задачи с различного вида границами.	Контрольная №1. Домашняя контрольная работа №1.
ОПК-2.2	<u>Уметь:</u> решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; находить вариацию линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.	Контрольная №2. Домашняя контрольная №2.
ОПК-3.2	<u>Уметь:</u> применять математический аппарат для решения уравнений Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решения уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решения уравнений Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решения уравнений Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; нахождения вариации линейного функционала; исследования на наличие сильного и слабого экстремума функционалов; решения вариационной задачи с различного вида границами	Контрольная №2. Домашняя контрольная №2.
ОПК-2.3	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Тест
ОПК-3.3	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.	Тест

#### СПИСОК ВОПРОСОВ .

1. Интегральные уравнения, определение. Классификация. Линейные интегральные уравнения.
2. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Задача Абеля. Задача о колебаниях струны.
3. Уравнения Вольтерра 2-го рода. Связь с дифференциальными уравнениями. Метод последовательных приближений. Решение с помощью резольвенты методом итерированных ядер.
4. Метод последовательных приближений и итерированных ядер для уравнения Фредгольма 2-го рода.

5. Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения. Определитель Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
6. Элементы функционального анализа. Вполне непрерывные операторы в гильбертовых пространствах. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром. Свойства собственных функций и характеристических чисел. Теорема о конечном спектре. Теорема Гильберта-Шмидта. Разложение резольвенты по собственным функциям ядра. Разложение итерированных ядер в ряд по собственным функциям.
7. Линейный функционал. Вариация линейного функционала. Понятие близости кривых  $k$ -го порядка. Сильный и слабый экстремум функционала. Необходимое и достаточное условие. Уравнение Эйлера, экстремали.
8. Простейшая вариационная задача.

#### УМЕТЬ ФОРМУЛИРОВАТЬ:

**Определения:** 1) Интегральное уравнение Фредгольма 2-го и 1-го рода.

2) Интегральные уравнения Вольтерра 2-го и 1-го рода.

3) Ядра симметричные, вырожденные, итерированные.

4) Характеристические числа и собственные функции.

5) Ортогональность функций в пространстве  $C[a, b], L^2[a, b]$ .

6) Нормированность функций в пространстве  $C[a, b], L^2[a, b]$ .

7) Метрика, норма, скалярное произведение, линейное пространство, Гильбертово и евклидово пространство, компактные множества, вполне непрерывные операторы, оператор Фредгольма, симметричные и самосопряженные операторы.

8) нелинейные интегральные уравнения, пример.

**Утверждения:** 1) Метод последовательных приближений.

2) Метод итерированных ядер.

3) Теорема Гильберта-Шмидта, применение к неоднородному уравнению Фредгольма 2-го рода.

4) 1-я, 2-я, 3-я теоремы Фредгольма, альтернатива Фредгольма.

5) Свойства характеристических чисел и собственных функций.

6) Разложение резольвенты симметричного ядра.

#### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНО РЕШЕНИЯ

##### Интегральные уравнения.

Интегральные уравнения Вольтера II рода.

Решить, сведя задачу к дифференциальному уравнению:

а)  $y(x) = x - \int_0^x e^{x-s} y(s) ds,$

б)  $y(x) + \int_0^x (x-s)y(s) ds = 1,$

в)  $y(x) = \int_0^x (1+x-s)y(s) ds + x^2.$

Построить резольвенту и решить методом итерированных ядер.

А)  $y(x) = a^2 \int_0^x (x-s)y(s) ds + f(x),$

$$\text{б) } y(x) + \int_0^x e^{x^2-s^2} y(s) ds = 1 - 2x.$$

Решить методом последовательных приближений.

$$\text{А) } y(x) + \int_0^x y(s) ds = x + \frac{x^2}{2},$$

$$\text{б) } y(x) + \int_0^x (x-s)y(s) ds = 1.$$

Неоднородное уравнение Фредгольма II-го рода

1. Построить резольвенту для уравнения  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s) ds + f(x)$  в случаях:

$$\text{а) } K(x,s) = xe^s, a=0, b=1, |\lambda| < 1,$$

$$\text{б) } K(x,s) = e^{-(x^2+s^2)}, a=0, b=\infty, |\lambda| < \sqrt{\frac{8}{\pi}},$$

$$\text{в) } K(x,s) = x + \sin s, a=-\pi, b=\pi, |\lambda| < \frac{1}{2\pi},$$

$$\text{г) } K(x,s) = \cos^2(x-s), a=-\pi, b=\pi.$$

Задача с вырожденным ядром

Построить резольвенту уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическим вырожденным ядром при значениях  $\lambda$ , не совпадающих ни с одним из характеристических чисел:

- через определители Фредгольма;

$$\text{а) } y(x) = \lambda \int_0^1 xsy(s) ds + f(x);$$

$$\text{б) } y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+s)y(s) ds + f(x);$$

Однородное уравнение Фредгольма II-го рода

1. Определить собственные функции и собственные значения следующих интегральных уравнений.

$$1. y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xs + x^2s^2)y(s) ds.$$

$$2. y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+s)y(s) ds.$$

$$3. y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \cos s)y(s) ds.$$

$$4. y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} s - s \operatorname{sh} x)y(s) ds.$$

$$5. y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s)y(s) ds.$$

Уравнения Фредгольма с симметричным ядром

6. Найти характеристические числа и собственные функции

$$K(x,t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

### Вариационное исчисление.

1. Найти 1-ю и 2-ю вариации функционалов.

$$1. V[y] = \int_a^b y y' dx.$$

$$2. V[y] = \int_a^b (x+y) dx.$$

$$3. V[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2) dx.$$

$$4. V[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2) dx.$$

$$5. V[y] = \int_0^x y' \sin y dx.$$

2. Найти экстремали вариационной задачи:

1.  $V[y] = \int_0^3 (3x - y)y dx, y(0) = 1, y(3) = \frac{9}{2}.$

2.  $V[y] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx, y(0) = 1, y(2\pi) = 1.$

3.  $V[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0.$

4.  $V[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2) dx, y(1) = 1, y(2) = 0.$

5.  $V[y] = \int_0^1 yy'^2 dx, y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}.$

6.  $V[y] = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$

7.  $V[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x} dx, y(0) = 0, y(1) = e^{-1}.$

Задача с подвижными границами

1. Найти кратчайшее расстояние от точки  $A(1,0)$  до эллипса  $4x^2 + 9y^2 = 36.$
2. Найти кратчайшее расстояние от точки  $A(-1,5)$  до параболы  $x = y^2;$
3. Найти кратчайшее расстояние между окружностью  $x^2 + y^2 = 1$  и  $x + y = 4.$

**7. Контрольно-оценочные материалы.**

**Контрольная работа № 1. Интегральные уравнения**

1. Решить интегральное уравнение, сведя его к дифференциальному

$$y(x) = e^x + \int_0^x (-2x + 2t + 3) y(t) dt$$

2. Методом последовательных приближений решить

$$y(x) = x - \int_0^x (x-t) y(t) dt \quad y_0(x) = 0$$

3. Методом итерированных ядер построить резольвенту и выписать решение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x+t} y(t) dt$$

4. Решить уравнение с вырожденным ядром для любых значений параметра

$$y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x+t) y(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$$

**Критерии оценки**

Каждое задание по 5 баллов, всего 20 баллов.

**Контрольная работа № 2. Вариационное исчисление**

1. Найти вариацию функционала

$$V[y] = \int_a^b (x + y) dx;$$

2. Найти экстремали функционала

$$V[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2) dx \text{ с условиями } y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

### **Критерии оценки**

Каждое задание по 5 баллов, всего 10 баллов.

### **Домашняя контрольная №1**

1. Дано интегральное уравнение Фредгольма II-го рода:

$$\phi(x) = \lambda \int_{-1}^1 [(a_1 x^2 + b_1 x)y^2 + c_1 y^2 + (d_1 x + e_1)y] \phi(y) dy + f(x).$$

- А) Решить уравнение в случае, если  $f(x) = f_1 x^2 + g_1 x + r_1$ ;  
 В) Найти собственные функции и собственные значения ядра;  
 С) Найти резольвенту, дать решение уравнения для произвольной функции  $f(x)$  через резольвенту.
2. Дано интегральное уравнение Вольтерра II-го рода:

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x [a_2 x + b_2 y + c_2] \phi(y) dy + f(x)$$

- А) Найти точное решение интегрального уравнения в случае  $f(x) = d_2 x^2 + c_2 x + f_2$ .  
 В) Построить 3 последовательных приближения для решения уравнения.  
 С) Найти выражение для резольвенты и написать решение для произвольной функции  $f(x)$  через резольвенту.

3. Дано интегральное уравнение Фредгольма II-го рода с симметричным ядром:

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{b_3} K(x, y) \phi(y) dy,$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} (a_3 + x)(b_3 - y), & 0 \leq x \leq y \leq b_3 \\ (a_3 + y)(b_3 - x), & 0 \leq y \leq x \leq b_3 \end{cases}$$

- А) Найти собственные значения и собственные функции ядра  
 В) Найти собственные значения и собственные функции для n-й итерации ядра.

### **Критерии оценки**

Каждое задание по 5 баллов, всего 15 баллов.

### **Домашняя контрольная №2**

Дан функционал:

$$J[y(x)] = \int_0^2 [a_1 y'^2 + a_2 y y' - 9a_1 y^2 + a_1 c_1 y(x^2 + d_1 x)] dx. (1)$$

1. Проверить линейность функционала (1). Обосновать ответ.
2. Найти приращение функционала (1).
3. Найти вариацию функционала (1) по первому и второму определениям.

4. Решить вариационную задачу с закрепленными границами для функционала (1) при условиях  $y(0) = b_1, y(2) = b_2$ .
5. Решить вариационную задачу с одним закрепленным концом для функционала (1) при условиях  $y(2) = b_1$ , первый конец перемещается по прямой  $x = 0$ .

\*значения констант  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, f_1, d_1$  приведены в таблице для расчетной работы №1.

\*номер варианта сохраняется с расчетной работы №1.

### Критерии оценки

Каждое задание по 5 баллов, всего 25 баллов.

Таблица выбора констант для расчетной работы №1

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
a1	1	10	15	5	-5	-10	7,5	-7,5	3	-3	-3	20	-20	25	-25	15	6	9	-9
b1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c1	1	-10	-15	-5	5	10	-7,5	7,5	-3	3	3	-20	20	-25	25	-15	-6	-9	9
d1	2	-10	-14	-4	6	11	-7	9	-2	4	4	-19	21	-24	26	-14	-5	-8	10
e1	2	1	1	-2	2	0	1	0	2	0	1	0	-2	-1	0	1	2	-1	0
f1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g1	0	0	2	1	3	4	2	1	-1	-3	-2	-1	0	-1	-2	1	2	3	4
r1	1	1	0	1	2	5	0	1	2	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
a2	1	-9	4	1	-1	-4	9	2	4	1,5	2	1	-1	-9	4	1	-1	-4	9
b2	-1	9	-4	-1	1	4	-9	-2	-4	-1,5	-2	-1	1	9	-4	-1	1	4	-9
c2		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d2		2	-1	1	-1	-2	-3	2	3	1	5	-2	2	1	4	5	6	-4	0
e2		3	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
f2		0	0	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
a3		-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	2
b3		2	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	
n		4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	9	3	4	5	6	7	8	9

### ТЕСТОВОЕ ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ

1. Уравнение  $y(x) = \lambda \int_0^x (-2x + 2t + 3) y(t) dt + e^x$  является уравнением
- Фредгольма 2-го рода
  - Вольтерра 1-го рода
  - Фредгольма 1-го рода
  - Вольтерра 2-го рода
2. Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком
- Дифференциала
  - Производной
  - Интеграла
  - Суммы
3. Характеристическими числами ядра  $K(x, t)$  называются значения параметра  $\lambda$  при которых
- Неоднородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x)$  имеет только нулевые решения

В) Неоднородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt + f(x)$  имеет ненулевые решения

С) однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$  имеет ненулевые решения

Д) однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$  имеет только нулевые решения

4. Интегральное уравнение  $y(x) = \int_0^x e^{x-t} y(t) dt + e^x$  имеет решение

А)  $y(x) = e^{2x}$

В)  $y(x) = xe^{x^2/3}$

С)  $y(x) = e^{-x} (x^2 / 2) + 1$

Д)  $y(x) = e^x + 1$

5. Уравнение  $y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi y(t) dt + \sin x$  является уравнением

А) Фредгольма 2-го рода

В) Вольтерра 1-го рода

С) Фредгольма 1-го рода

Д) Вольтерра 2-го рода

6. Формулы  $y_0 = f(x)$ ,  $y_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) y_{n-1}(t) dt, n = \square$ ,  $y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y_n(x)$  описывают метод

А) Последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2-го рода

В) Последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода

С) Итерированных ядер для уравнений Фредгольма 2-го рода

Д) Итерированных ядер для уравнений Вольтерра 2-го рода

7. Собственная функция  $y(x) = (1 + 2x)$  является решением уравнения

А)  $y(x) - \lambda \int_0^1 (1 + 2x) ty(t) dt = 0$

В)  $y(x) - \lambda \int_0^x (1 + 2x) ty(t) dt = \sin x$

С)  $y(x) - \lambda \int_0^x (1 + 2x) ty(t) dt = 0$

Д)  $y(x) - \lambda \int_0^\pi (1 + 2x) ty(t) dt = \sin x$

8. Ядро  $K(x,t) = t \sin x + x^2 t^3$



- A) Симметричное,
- B) Ортогональное,
- C) Вырожденное,
- D) Сингулярное.

9. Собственными функциями ядра  $K(x, t)$  называются

- A) Нулевые решения  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x)$  .
- B) Ненулевые решения  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x)$  .
- C) Нулевые решения  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  .
- D) Ненулевые решения  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  .

10. Неоднородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x)$  , (где  $K(x, t)$  - непрерывное,

вырожденное, вещественное ядро) имеет бесконечно много решений или не имеет ни одного

- A) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  имеет только нулевое решение;
- B) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  имеет ненулевое решение;
- C) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  не имеет решений;
- D) Тогда и только тогда, когда сопряженное однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(t, x) y(t) dt$  имеет только нулевое решение;

11. Ядро  $K(x, t) = \begin{cases} t(x+1), 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ (t+1)x, 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases}$

- A) Симметричное,
- B) Ортогональное,
- C) Вырожденное,
- D) Сингулярное.

12. Уравнение  $\int_0^1 e^{-xt} y(t) dt = e^x$  является интегральным уравнением

- A) Неоднородным Фредгольма 1-го рода
- B) Однородным Вольтерра 1-го рода
- C) Неоднородным Фредгольма 2-го рода

Д) Неоднородным Вольтерра 1-го рода

13. Характеристические числа интегрального оператора Фредгольма с непрерывным, симметричным, вырожденным, неравным тождественно нулю ядром могут образовывать последовательность

А)  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ , причем  $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ ;

В)  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ ;

С)  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ ;

Д)  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

14. Для ядра  $K(x, t) = xt$  уравнения  $y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xty(t) dt$  повторными будут ядра

А)  $K_1(x, t) = x, K_2(x, t) = \frac{x}{3}, K_3(x, t) = \frac{x}{9}, \dots, K_n(x, t) = \frac{x}{3^{n-1}}$ ;

В)  $K_1(x, t) = xt, K_2(x, t) = \frac{xt}{3}, K_3(x, t) = \frac{xt}{9}, \dots, K_n(x, t) = \frac{xt}{3^{n-1}}$ ;

С)  $K_1(x, t) = xt, K_2(x, t) = \frac{xt}{2}, K_3(x, t) = \frac{xt}{4}, \dots, K_n(x, t) = \frac{xt}{2^{n-1}}$ ;

Д)  $K_1(x, t) = t, K_2(x, t) = \frac{t}{3}, K_3(x, t) = \frac{t}{9}, \dots, K_n(x, t) = \frac{t}{3^{n-1}}$ .

15. Собственные функции оператора Фредгольма, соответствующие различным характеристическим числам

А) Пропорциональны;

В) Линейно зависимы;

С) Ортогональны;

Д) Комплексно сопряженные.

16. Неоднородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x)$ , (где  $K(x, t)$  - непрерывное, вырожденное ядро) имеет единственное решение

А) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  имеет только нулевое решение;

В) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  имеет ненулевое решение;

С) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$  не имеет решений;

D) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt$  имеет бесконечно много решений;

17. Уравнение  $y(x) = \lambda \int_0^x (x+2t) y(t) dt$  является уравнением

- A) Однородным Фредгольма 2-го рода
- B) Однородным Вольтерра 1-го рода
- C) Неоднородным Фредгольма 2-го рода
- D) Однородным Вольтерра 2-го рода

18. Уравнение  $y(x) = \lambda \int_0^x (x+2t) y(t) dt$  является

- A) линейным уравнением Вольтерра;
- B) нелинейным уравнением Фредгольма;
- C) нелинейным уравнением Вольтерра;
- D) линейным уравнением Фредгольма.

19. Экстремалью функционала называется кривая

- A) интегральная для уравнения Эйлера
- B) на которой достигается абсолютный экстремум функционала
- C) на которой достигается относительный экстремум функционала
- D) на которой вторая вариация функционала обращается в нуль

20. Установить соответствие. Если функционал  $I(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$  достигает экстремума на кривой  $y_0(x)$ , то она удовлетворяет уравнению

$$\text{A) } F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \text{ B) } \begin{cases} F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \\ F'_z - \frac{d}{dx} F'_z = 0. \end{cases}, \text{ C) } F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{y^{(n)}} = 0$$

$$\text{D) } F'_y + \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0.$$

21. Функционалом называется отображение

- A) – со значениями в  $\mathbb{R}$ .
- B) – определённое на пространстве функций со значениями в  $\mathbb{R}$ .
- C) – линейное.
- D) – представимое в виде интеграла от переменной функции

22. Функция называется **допустимой** для функционала в вариационной задаче, если

А) – она входит в его естественную область определения.

В) – она входит в область его задания.

С) – её носитель компактен.

Д) – она не является нулём функционала.

23. Вариацией функционала называется

А) линейная часть его приращения

В) нелинейная часть его приращения

С) квадрат его приращения

Д) модуль его приращения

24. Функционал  $F(y)$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  сильного максимума, если значения функционала  $F(y)$  не больше  $F(y_0)$  на любой близкой к  $y = y_0(x)$

А) в смысле близости 0-го порядка;

В) в смысле близости 1-го порядка;

С) в смысле близости 2-го порядка;

Д) в смысле близости 3-го порядка.

25. Выбери правильное утверждение необходимого условия экстремума функционала

А) Дифференцируемый функционал  $F(y)$  достигает экстремума при  $y = y_0(x)$ , если при  $y = y_0(x)$  вариация  $\delta F = 0$ .

В) Дифференцируемый функционал  $F(y)$  достигает экстремума при  $y = y_0(x)$ , тогда и только тогда при  $y = y_0(x)$  вариация  $\delta F = 0$ .

С) Если дифференцируемый функционал  $F(y)$  достигает экстремума при  $y = y_0(x)$ , то при  $y = y_0(x)$  вариация  $\delta F = 0$ .

Д) Когда вариация  $\delta F = 0$  при  $y = y_0(x)$ , тогда дифференцируемый функционал  $F(y)$  достигает экстремума при  $y = y_0(x)$ .

26. Простейшая задача вариационного исчисления ставится так

А) среди всех функций  $y(x)$ , имеющих непрерывную производную ( $y(x) \in C^1[a, b]$ ) и удовлетворяющих условиям  $y(a) = A, y(b) = B$ , найти ту, которая доставляет экстремум

функционалу  $F(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ .

В) среди всех функций  $y(x)$ , имеющих непрерывную производную ( $y(x) \in C^1[a, b]$ ) и удовлетворяющих условиям  $y(a) = A$ , найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$F(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx$ .

С) среди всех функций  $y(x)$ , имеющих непрерывную производную ( $y(x) \in C^1[a, b]$ ) и удовлетворяющих условиям  $y(a) = A, y(b) = B$ , найти ту, которая доставляет экстремум

функционалу  $F(y) = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$ .

D) среди всех функций  $y(x)$ , имеющих непрерывную производную ( $y(x) \in C^1[a, b]$ ), найти ту, которая доставляет экстремум функционалу  $F(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ .

27. Функционал  $F(y)$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  слабого минимума, если значения функционала  $F(y)$  не меньше  $F(y_0)$  на любой близкой к  $y = y_0(x)$

- A) в смысле близости 0-го порядка;
- B) в смысле близости 1-го порядка;
- C) в смысле близости 2-го порядка;
- D) в смысле близости 3-го порядка.

28. Установить соответствие. Если функционал  $I(y) = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx$  достигает экстремума на кривой  $y_0(x)$ , то она удовлетворяет уравнению

A)  $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ , B)  $\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases}$ , C)  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$

D)  $F'_y + \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ .

29. Уравнение  $y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{y(t)+1}{y^2(t)} dt$  является

- A) линейным уравнением Вольтерра;
- B) нелинейным уравнением Фредгольма;
- C) нелинейным уравнением Вольтерра;
- D) линейным уравнением Фредгольма

30. Установить соответствие. Если функционал  $I(y) = \int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$  достигает экстремума на кривой  $y_0(x)$ , то она удовлетворяет уравнению

A)  $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ , B)  $\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases}$ , C)  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$

D)  $F'_y + \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ .

### Критерии оценки

За каждое задание - 1 балл, всего 30 баллов.

## Критерии оценки итогового контроля

Устанавливается следующая градация перевода оценки из многобалльной в четырехбалльную:

### Зачеты:

- зачено – от 60 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- не зачено – от 0 до 59 баллов.

В случае, если студент сдает какое-либо из контрольных мероприятий позже установленного срока, преподаватель может снизить максимально возможное количество баллов за данный вид контроля на 5% за каждую неделю просрочки.

Посещение лекционных и практических (семинарских, лабораторных) занятий оценивается в суммах до 6 и 10 баллов соответственно, однако эти баллы являются штрафными и вычитаются преподавателем из набранных студентами баллов в ходе текущего и рубежного контроля по следующей схеме:

– за пропуски лекционных занятий

за 25 % пропусков вычитается 1 балл

за 50 % пропусков вычитается 4 балла

за 75 % пропусков вычитается 6 баллов

за 100 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний

– за пропуски практических (семинарских, лабораторных) занятий

за 20 % пропусков вычитается 2 балла

за 40 % пропусков вычитается 5 баллов

за 50 % пропусков вычитается 7 баллов

за 75 % пропусков вычитается 10 баллов

более 75 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний.

Студент, набравший по итогам текущего и рубежного контроля менее 60 возможных баллов или пропустивший более 75 % практических (семинарских, лабораторных) зачета не получает. В этом случае, он изучает неосвоенные им темы, выполняет соответствующие задания на платной основе в сроки, установленные деканатом для ликвидации задолженностей. Баллы, полученные таким образом, прибавляются к количеству баллов, набранных студентом в семестре.

## 4.3. Рейтинг–план дисциплины.

### Интегральные уравнения и вариационное исчисление

*(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)*

направление\_подготовки **[03.03.01] Прикладная математика и физика**

курс   3  , семестр   5  

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. Интегральные уравнения.</b>				
<b>Текущий контроль</b>			<b>0</b>	<b>15</b>

1. Контроль выполнения и проверка отчетности по домашней контрольной работе №1.	0-5	3	0	15
<b>Рубежный контроль</b>			<b>0</b>	<b>20</b>
1. Контрольная работа №1	0-5	4	0	20
<b>Модуль 2. Вариационное исчисление.</b>				
<b>Текущий контроль</b>			<b>0</b>	<b>35</b>
1. Контроль выполнения и проверка отчетности по домашней расчетной работе №2	0-5	5	0	25
1. Контрольная работа №2	0-5	2	0	10
<b>Рубежный контроль</b>			<b>0</b>	<b>30</b>
2. Тест	0-1	30	0	30
<b>Посещаемость</b>				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0
2. Посещение практических занятий			-10	0
<b>Поощрительные баллы</b>				
1. Своевременное выполнение заданий и активная работа у доски.			0	<b>10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Зачет			60	<b>110</b>

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

В библиотеке Башкирского государственного университета имеются в наличии следующие издания:

#### Основная литература:

1. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения : учебное пособие / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. - Москва : Физматлит, 2003. - 78 с. - ISBN 5-9221-0275-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68122>
2. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов. - Москва : Физматлит, 2005. - 214 с. - ISBN 5-9221-0628-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68123>
3. Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. Петровский. - 3-е изд., испр. - Москва : Изд-во "Наука", 1965. - 126 с. - ISBN 978-5-4458-5092-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222214>

### Дополнительная литература:

4. Сборник задач по уравнениям математической физики : учебное пособие / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова и др. - 3-е изд., исправл. - Москва : Физматлит, 2001. - 287 с. - ISBN 5-9221-0072-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68127>
5. Интегральные уравнения и вариационное исчисление [Электронный ресурс]: учеб. пособие / БашГУ; сост.: Э. А. Назирова, А. Н. Кучкарова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:<https://elib.bashedu.ru/dl/read/NazirovaIntegr.Uravnen. i variant.Ischesl.UchPos.2012.pdf>>.
6. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. - б.м. : б.и., б.г.. - 425 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165>
7. Жибер, А. В. Дифференциальные уравнения математической физики и методы их решения [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. В. Жибер, Г. З. Мухаметова, Н. А. Сидельникова; БашГУ. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:<https://elib.bashedu.ru/dl/read/ZhiberDifUravnMetemFiziki.pdf>>.
8. Интегральные уравнения и вариационное исчисление [Электронный ресурс]: учеб. пособие / БашГУ; сост.: Э. А. Назирова, А. Н. Кучкарова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:<https://elib.bashedu.ru/dl/read/NazirovaIntegr.Uravnen. i variant.Ischesl.UchPos.2012.pdf>>.

### 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. «Электронный читальный зал» (<http://www.bashlib.ru/echitzal/>).
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» (<http://www.biblioclub.ru/>) .
3. Издательство «Лань» (<http://e.lanbook.com/>) .
4. [http://yagola.professorjournal.ru/integral\\_equation](http://yagola.professorjournal.ru/integral_equation) - лекции по интегральным уравнениям и вариационному исчислению
5. [www.gpntb.ru/](http://www.gpntb.ru/)— Государственная публичная научно-техническая библиотека.
6. [www.nlr.ru/](http://www.nlr.ru/) — Российская национальная библиотека.
7. [www.nns.ru/](http://www.nns.ru/) — Национальная электронная библиотека.
8. [www.rsl.ru/](http://www.rsl.ru/)— Российская государственная библиотека.

### 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для проведения лекционных и практических занятий используется аудиторный фонд



физико-технического института.

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
1	2	3
Большая физическая аудитория 02	Лекции	Доска, компьютер, мультимедийный проектор, экран Программное обеспечение: 1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 104 от 17.06.2013 г. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 114 от 12.11.2014 г.
<i>учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</i> аудитории № 322 или № 324 или № 318 (физмат корпус)	Практические занятия	Доска, мел, сборники задач, калькулятор
Читальный зал №1 (главный корпус, 1 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, ПК (моноблок) - 3 шт, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 76.
Читальный зал №2 (корпус физмата, 2 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 50.
Читальный зал №4 (корпус биофака, 4 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 60.

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

Дисциплины **Интегральные уравнения и вариационное исчисление** на 5 семестр

Очная  
форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	2/72
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	36,2
лекций	18
практических/ семинарских лабораторных	18
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)(ФКР)	0,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	35,8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	

№ п.п.	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов (СРС)	Форма текущего контроля успеваемости
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Модуль 1. Интегральные уравнения.</b>								
1	Линейные операторы и их приложения в математической физике. Понятие интегрального уравнения. Линейные интегральные уравнения. Классификация. Задача Абея. Уравнение Фредгольма как пример некорректно поставленной задачи. Метод регуляризации А.Н. Тихонова	2	2		4	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №1.	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях,
2	Уравнения Вольтера 2-го рода. Связь с дифференциальными уравнениями. Метод последовательных приближений, метод итерированных ядер для уравнений Вольтера и Фредгольма 2-го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Метод определителей Фредгольма. Резольвента.	4	4		8	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №1.	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контр №1
3	Вполне непрерывные операторы. Интегральные уравнения Фредгольма с симметричными ядрами. Собственные значения и собственные функции и их свойства. Альтернатива Фредгольма. Теорема Гильберта-Шмидга. Функция Грина. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению.	4	4		8	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №1.	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях,

	Теорема о конечном спектре. Применение преобразований Лапласа и Фурье для решения уравнений							
<b>Модуль 2. Вариационное исчисление.</b>								
4	Элементы вариационного исчисления. Введение. Примеры, приводящие к постановке вариационных задач. Понятие функционала. Расстояние между кривыми. Приращение функционала. Вариация функционала.	4	4		8	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №2	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, домашняя контрольная работа №2.
5	Наибольшее значение функционала. Необходимые и достаточные условия наличия экстремума. Типы вариационных задач. Вывод уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи с закрепленными границами. Уравнение Остроградского	4	4		7,8	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №2	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контрольная работа 2,
	<b>Всего часов:</b>	<b>18</b>	<b>18</b>		<b>35,8</b>			

**Примечание 1.** В таблицу не включено 0.2 часа ФКР (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности во время семестра, подразумевающие контактную работу обучающихся с преподавателем).

