



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждено: на заседании кафедры  
протокол от « 20 » апреля 2020 г.  
№ 5  
Зав. кафедрой  /Хабидуллин Б.Н.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета /института  
 /Балапанов М.Х.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Дисциплина Линейная алгебра

*(наименование дисциплины)*

Базовая часть, модуль «Математика»

*(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))*

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)

03.03.01 Прикладная математика и физика

*(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))*

Направленность (профиль) подготовки

Моделирование физических процессов и технологий

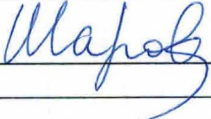
*(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)*

Квалификация

бакалавр

*(указывается квалификация)*

Разработчик (составитель)  
Доцент кафедры ВАиГ, к.ф.-м.н.

 /Шарипов Р.А.

Для приёма: 2020 г.

Уфа 2020 г.

Составитель: к. ф.-м. н., доцент Шарипов Руслан Абдулович.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры Высшей алгебры и геометрии,  
протокол № 5 от « 20 » апреля 2020 г.

Заведующий кафедрой



/ Хабибуллин Б. Н. /

### Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	5
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	5, 13
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	6
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	6
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	8, 20, 21
4.3. Рейтинг-план дисциплины	11, 19
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	11
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	11
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	12
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	12
7. Приложение 1	13
8. Приложение 2	19
9. Приложение 3	20
10. Приложение 4	21

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Этапы освоения	Результаты обучения	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
1-й этап  Знания	<u>Знать</u> : понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, понятия инвариантных, собственных и корневых подпространств линейного оператора; понятие жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства. равнения поверхностей второго порядка в пространстве.	ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	
	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств.	ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.	
2-й этап  Умения	<u>Уметь</u> : отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; вычислять суммы и пересечения подпространств; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	
	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и	ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и	

	линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	концепции в области их специализации.	
3-й этап Владеть навыками	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	
	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.	ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.	

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 1 курсе во 2 семестре.

Цели изучения дисциплины: овладение математическим аппаратом, используемым в дисциплинах специализации.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные на предыдущем уровне образования и проверенные при поступлении в университет, а также компетенции, сформированные в дисциплине «Аналитическая геометрия».

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

#### 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

##### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<u>Знать</u> : понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, понятия инвариантных, собственных и корневых подпространств линейного оператора; понятие жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства. равнения поверхностей второго порядка в пространстве.	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё
Второй этап	<u>Уметь</u> : отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; вычислять суммы и пересечения подпространств; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё

	сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах.				
Третий этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Практически не владеет	Не владеет по значительной части материала дисциплины	По существу владеет	Владеет

ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств.	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё
Второй этап	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с	Практически не владеет	Не владеет по	По существу	Владеет

этап	практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.	владеет	значительной части материала дисциплины	владеет	
------	---	---------	---	---------	--

#### Форма итогового контроля по дисциплине – экзамен

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины.

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

#### 4.2. Контрольные задания и материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	<u>Знать</u> : понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, понятия инвариантных, собственных и корневых подпространств линейного оператора; понятие жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства. уравнения поверхностей второго порядка в пространстве.	ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений,	ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у



	линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств.	специализации.	доски.
2-й этап Умения	<u>Уметь</u> : отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; вычислять суммы и пересечения подпространств; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
3-й этап Владеть навыками	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	ОПК-2 – способностью применять теорию и методы математики для построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.	ОПК-3 – способностью понимать ключевые аспекты и концепции в области их специализации.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.

### Вопросы для проведения экзамена

1. Комплексные числа.
2. Линейные векторные пространства.
3. Линейная зависимость и независимость.
4. Порождающие системы и базисы. Координаты векторов.
5. Координаты векторов. Преобразование координат векторов при замене базиса.
6. Пересечения и суммы подпространств.
7. Множества и отображения.
8. Линейные отображения.
9. Матрица линейного отображения.
10. Линейные операторы.
11. Матрица линейного оператора.
12. Инвариантные подпространства. Сужение операторов.
13. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
14. Корневые подпространства, базисы из цепочек и Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.
15. Линейные функционалы. Векторы и ковекторы. Сопряженное пространство.
16. Билинейные и квадратичные формы. Формула восстановления.
17. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Индексы инерции и сигнатура.

### Экзаменационные билеты

Экзаменационные билеты состоят из 2 вопросов, первый вопрос берётся из первой половины списка вопросов к экзамену (1-8), второй вопрос — из второй половины списка (9-17). Исчерпывающий и верный ответ на каждый вопрос оценивается в 15 баллов.

#### Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** если студент продемонстрировал владение более 80% учебного материала по дисциплине.
- **17-24 баллов** если студент продемонстрировал владение от 60% до более 79% учебного материала по дисциплине.
- **10-16 баллов** если студент продемонстрировал владение от 45% до более 59% учебного материала по дисциплине.

- **1-10 баллов** если студент продемонстрировал владение менее 45% учебного материала по дисциплине.  
Образец экзаменационных билетов представлен в приложении 4

### **Задачи для рубежного контроля.**

Дисциплина разбита на два модуля. По каждому модулю имеется свой список задач для самостоятельного решения. По первому модулю 33 задачи, по второму модулю 48 задач. Задачи доставляются студенту в режиме онлайн через университетский сервер WebWork

<http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>

За рубежный контроль студент может получить до 30 баллов, по 15 баллов за каждый модуль. Примеры задач для рубежного контроля по двум модулям представлены в приложении 3.

### **Работа в аудитории и у доски.**

Работа у доски состоит в выборочном разборе отдельных задач, аналогичных тем, что студенты получают в режиме онлайн через университетский сервер WebWork. Решение задачи сопровождается обсуждением теории. За каждый модуль студент выходит к доске как минимум 1 раз. При этом знание теории оценивается в 5 баллов, решение задач в 10 баллов, реплики с места, дополнения, пояснения в 5 баллов. Суммарно по 20 баллов за каждый из двух модулей.

### **4.3. Рейтинг-план дисциплины.**

Рейтинг-план дисциплины представлен в приложении 2.

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература:**

1. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 1996, С. 146. ISBN 978-5-7477-0099-5 [Электронный ресурс] — Электронная версия печ. публикации . — <URL: [https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov\\_Kurs\\_linejnoj\\_algebrj\\_up\\_1996.pdf](https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov_Kurs_linejnoj_algebrj_up_1996.pdf)>.

2. Гайдамак О. Г., Силова Е. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2012, С. 96. [Электронный ресурс] — Электрон. версия печ. публикации .—<URL: <https://elib.bashedu.ru/dl/read/GaidamakSilovaAnalit.Geometriy i LineinayAlgebraUPos.2012.pdf/info>>.

### Дополнительная литература:

3. Ахметвалиева Э. Н., Ахтямов А. М. Математика. Ч. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2010 — Электрон. версия печ. публикации. — <URL: <https://elib.bashedu.ru/dl/read/AhmetvalievaAhtymovaMatematika1Uch.pos.2010.pdf>>.

3.1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник для физ.-мат. спец. вузов / П. С. Александров . — СПб. : Лань, 2009 .— 512 с. : ил. — ISBN 978-5-8114-0908-2 .— <URL:[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=493](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=493)>.

### 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

4. Университетский сервер WebWork на сайте БашГУ: <http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>.

5. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Онлайн учебник: <URL: <http://freetextbooks.narod.ru/r4-b2.htm>>.

### 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

<i>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</i>	<i>Вид занятий</i>	<i>Наименование оборудования, программного обеспечения</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Аудитория 01, 02, 301 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Лекции</i>	Доска
Аудитория 322, 318, 216 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Практические занятия</i>	Доска
Библиотека, читальные залы	<i>Самостоятельная работа</i>	Интернет, университетский сервер WebWork

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Линейная алгебра на 2 семестр

очная

форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	49,2
лекций	16
практических/ семинарских	32
лабораторных	0
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	33
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	61,8

Форма контроля:  
экзамен 2 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР /СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Модуль 1</b>								
1.	Матричное решение уравнения $i^2=-1$ . Комплексные числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение в степень и извлечение корней. Комплексный логарифм и комплексная экспонента. Линейное векторное пространство (ЛВП). Определение и примеры ЛВП. Аксиомы ЛВП и простейшие следствия из них. Понятие подпространства. Линейная зависимость и независимость систем векторов в ЛВП. Свойства линейной зависимости. Теорема Штейница.	2	4	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 1-8 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
2.	Системы векторов и их линейные оболочки. Порождающие системы векторов. Свойства минимальности и линейной независимости порождающих систем. Базисы и размерность ЛВП. Свойства размерности. Теорема о дополнении базиса. Базисы и координатное	2	4	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 9-16 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	представление векторов, верхние и нижние индексы. Замена базисов в ЛВП. Матрицы перехода. Связь матриц прямого и обратного переходов. Преобразование координат вектора при замене базисов.							
3.	<p>Отображения. Область определения и область значений отображения. Образы и полные прообразы отдельных элементов и подмножеств. Множество значений отображения. Сюръективность, инъективность и биективность отображений. Композиция отображений. Тожественное отображение. Понятие об обратном отображении. Сужение и продолжение отображений. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Критерии инъективности и сюръективности линейных отображений к терминам ядра и образа. Линейность отображения, обратного линейному и биективному отображению. Теорема о линейной независимости прообразов линейно независимых векторов. Изоморфизм линейных векторных пространств. Теорема о совпадении размерностей изоморфных пространств. Базисы и изоморфизм общих линейных векторных пространств пространствам <math>\mathbb{K}^n</math>, где <math>\mathbb{K}</math> — поле.</p>	2	4	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 17-24 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
4	<p>Матрица линейного отображения. Матрица составного отображения (композиции). Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов в области определения и в области значений. Задача о приведении матрицы линейного отображения к почти диагональному виду. Теорема о сумме размерностей ядра и образа линейного</p>	2	4	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 25-33 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	отображения. Вычисление ядра и образа линейного отображения. Нахождение пары базисов, диагонализующих матрицу линейного отображения.							
<b>Модуль 2</b>								
5	Линейные операторы. Инъективность, сюръективность и биективность в случае линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Детерминант линейного оператора. Невырожденность и биективность. Алгебраические операции с линейными операторами и их свойства. Коммутатор и антикоммутатор линейных операторов. Инвариантные подпространства линейного оператора. Суммы и пересечения инвариантных подпространств. Одномерные инвариантные подпространства и собственные векторы. Собственные числа и характеристическое уравнение линейного оператора. Корни характеристического уравнения (характеристические числа). Простые и кратные характеристические числа. Задача о приведении матрицы линейного оператора к каноническому виду. Диагонализуемые операторы. Собственные подпространства. Теорема о сумме собственных подпространств, отвечающих различным собственным числам.	2	4	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 1-12 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
6	Кратные собственные числа и корневые подпространства линейного оператора. Две теоремы о сумме корневых подпространств, отвечающих различным собственным числам. Особенности вещественного и комплексного	2	4	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 6-10 из числа задач для рубежного	Оценка работы в аудитории и у доски



	<p>случаев. Цепочки векторов в корневых подпространствах. Начальный и крайний векторы цепочки. Теорема о линейной независимости цепочек с линейно независимыми крайними векторами и теорема о базисе из цепочек в корневом подпространстве линейного оператора. Жорданов блок, жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли. Линейные функционалы. Алгебраические операции с функционалами и сопряженное пространство. Координатные функционалы и сопряженный базис. Вычисление размерности сопряженного пространства. Ковекторная запись линейных функционалов и скалярное произведение вектора с ковектором. Преобразование координат ковектора при смене базиса. Ортогональные дополнения подпространств в сопряженном пространстве и их размерности. Свойства ортогональных дополнений. Сопряженное отображение.</p>						контроля	
7	<p>Билинейные и квадратичные формы. Симметричные билинейные формы. Восстановление симметричной билинейной формы по соответствующей ей квадратичной форме. Компоненты билинейных и квадратичных форм в базисе. Преобразование компонент квадратичной формы при замене базиса. Ядро квадратичной формы и ортогональные дополнения относительно квадратичных форм. Приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду. Нулевой индекс инерции и его связь с размерностью ядра. Сигнатура квадратичной</p>	2	4	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 11-15 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	формы (особенности комплексного и вещественного случаев). Положительный и отрицательный индексы инерции в вещественном случае. Теорема об инвариантности положительного и отрицательного индексов инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности.							
8	Положительные квадратичные формы в роли скалярного произведения. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Понятие длины вектора и угла между векторами. Матрица Грама и ее детерминант. Теорема о дополнении ортонормированного базиса из подпространства до ортонормированного базиса во всем пространстве. Квадратичные формы в евклидовом пространстве. Ограниченность квадратичных форм в конечномерных евклидовых пространствах и их нормы. Экстремальные векторы и диагонализация квадратичной формы в ортонормированном базисе. Диагонализация пары форм, одна из которых положительно определена.	2	4	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 16-20 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
	<b>Всего часов:</b>	<b>16</b>	<b>32</b>	<b>0</b>	<b>33</b>			

## Приложение 2

Рейтинг-план дисциплины Линейная алгебра

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладная математика и физика

Курс первый, семестр второй (весенний)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий в модуле	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Работа у доски и в аудитории			0	20
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Решение 33 задач онлайн из первого задания WebWork	15	1	0	15
<b>Модуль 2</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Работа у доски и в аудитории			0	20
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Решение 48 задач онлайн из второго задания WebWork	15	1	0	15
<b>Поощрительные баллы</b>				
Согласно положению о модульно рейтинговой системе			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
Посещение лекционных занятий			0	-6
Посещение семинарских занятий			0	-10
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен	15	2	0	30

Образцы задач для рубежного контроля

Из первого задания по WebWork

**Задача 1.1.** Какие из перечисленных ниже подмножеств  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  являются линейными подпространствами  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

- A) Матрицы размерности  $3 \times 3$  в приведённой ступенчатой форме;
- B) Диагональные матрицы размерности  $3 \times 3$ ;
- C) Матрицы размерности  $3 \times 3$  с нулями в во второй строке;
- D) Симметричные матрицы размерности  $3 \times 3$ ;
- E) Обратимые матрицы размерности  $3 \times 3$ ;
- F) Матрицы размерности  $3 \times 3$  с целыми элементами.

**Задача 1.2.** Пусть  $x, y, z$  — векторы и пусть  $z = -1x - 3y$  и  $w = -2x + 3y - 2z$ . Выберите верные утверждения из приведённого ниже списка.

- A)  $\text{Span}(y) = \text{Span}(w)$ ;
- B)  $\text{Span}(x, y) = \text{Span}(x, w, z)$ ;
- C)  $\text{Span}(y, w) = \text{Span}(z)$ ;
- D)  $\text{Span}(x, z) = \text{Span}(y, w)$ .

**Задача 1.3.** Пусть  $S_1$  — линейное подпространство пространства  $M_4(\mathbb{R})$ , состоящее из всех симметричных матриц. Пусть  $S_2$  — линейное подпространство пространства  $M_5(\mathbb{R})$ , состоящее из всех кососимметричных матриц. Найдите размерности этих подпространств.

Из второго задания по WebWork

**Задача 2.1.** Найдите определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 - i & 4 + 2i \\ 1 + 2i & -1 - 4i \end{bmatrix}.$$

**Задача 2.2.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 12 \\ -16 & 15 \end{bmatrix}.$$

Найдите две различные диагональные матрицы  $D$  и соответствующие матрицы  $S$  такие, что  $A = SDS^{-1}$ .

Образец экзаменационных билетов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

экзаменационный билет № номер скрыт  
по дисциплине «Линейная алгебра» (20\_\_ - \_\_ уч. год)

1. Линейная зависимость и независимость.
2. Матрица линейного отображения.

Преподаватель \_\_\_\_\_ / Шарипов Р. А. /

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Хабибуллин Б. Н. /