



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждено: на заседании кафедры  
протокол от « 20 » апреля 2020 г. № 5  
Зав. кафедрой  /Хабибуллин Б.Н.      Согласовано:  
Председатель УМК факультета /института  
 /Балапанов М.Х.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Дисциплина Линейная алгебра

*(наименование дисциплины)*

Базовая часть, модуль «Математика»

*(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))*

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)

03.03.02 Физика

*(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))*

Направленность (профиль) подготовки

Физика Земли и планет

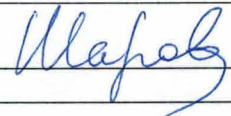
*(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)*

Квалификация

бакалавр

*(указывается квалификация)*

Разработчик (составитель)  
Доцент кафедры ВАиГ, к.ф.-м.н.

 /Шарипов Р.А.

Для приёма: 2020 г.

Уфа 2020 г.

Составитель: к. ф.-м. н., доцент Шарипов Руслан Абдулович.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры Высшей алгебры и геометрии,  
протокол № 5 от « 20 » апреля 2020 г.

Заведующий кафедрой



/ Хабибуллин Б. Н. /

### Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	6
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	6, 14
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	6
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	6
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	9, 21, 22
4.3. Рейтинг-план дисциплины	12, 20
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	12
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	12
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	13
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	13
7. Приложение 1	14
8. Приложение 2	20
9. Приложение 3	21
10. Приложение 4	22

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Этапы освоения	Результаты обучения	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
1-й этап  Знания	<u>Знать</u> : понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, понятия инвариантных, собственных и корневых подпространств линейного оператора; понятие жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства.	ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	
	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств.	ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.	
2-й этап  Умения	<u>Уметь</u> : отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; вычислять суммы и пересечения подпространств; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить	ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели	

	длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах.	типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	
	<u>Уметь:</u> применять математический аппарат замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.	
3-й этап Владеть навыками	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики.	ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	
	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач и демонстрировать способность критически переосмысливать накопленный опыт.	ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.	

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 1 курсе во 2 семестре.

Цели изучения дисциплины: овладение математическим аппаратом, используемым в дисциплинах специализации.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные на предыдущем уровне образования и проверенные при поступлении в университет, а также компетенции, сформированные в дисциплине «Аналитическая геометрия».

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<b>Знать:</b> понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё

	собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, понятия инвариантных, собственных и корневых подпространств линейного оператора; понятие жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства.				
Второй этап	<u>Уметь:</u> отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; вычислять суммы и пересечения подпространств; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики.	Практически не владеет	Не владеет по значительной части материала дисциплины	По существу владеет	Владеет

ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»

Первый этап	<u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств.	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё
Второй этап	<u>Уметь:</u> применять математический аппарат замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач и демонстрировать способность критически переосмысливать накопленный опыт.	Практически не владеет	Не владеет по значительной части материала дисциплины	По существу владеет	Владеет

#### Форма итогового контроля по дисциплине – экзамен

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины.

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».



**4.2. Контрольные задания и материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	<u>Знать:</u> понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, понятия инвариантных, собственных и корневых подпространств линейного оператора; понятие жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства.	ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Знать:</u> естественнонаучную сущность понятий линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств.	ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
2-й этап Умения	<u>Уметь:</u> отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; вычислять суммы и пересечения подпространств; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм;	ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.

	находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах.	задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	
	<u>Уметь:</u> применять математический аппарат замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с координатами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
3-й этап  Владеть навыками	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики.	ОПК-2, способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач и демонстрировать способность критически переосмысливать накопленный опыт.	ОПК-8, способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости направление своей деятельности.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.

### Вопросы для проведения экзамена

1. Комплексные числа.
2. Линейные векторные пространства.
3. Линейная зависимость и независимость.
4. Порождающие системы и базисы. Координаты векторов.
5. Координаты векторов. Преобразование координат векторов при замене базиса.
6. Пересечения и суммы подпространств.
7. Множества и отображения.
8. Линейные отображения.
9. Матрица линейного отображения.
10. Линейные операторы.
11. Матрица линейного оператора.
12. Инвариантные подпространства. Сужение операторов.
13. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
14. Корневые подпространства, базисы из цепочек и Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.
15. Линейные функционалы. Векторы и ковекторы. Сопряженное пространство.
16. Билинейные и квадратичные формы. Формула восстановления.
17. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Индексы инерции и сигнатура.

### Экзаменационные билеты

Экзаменационные билеты состоят из 2 вопросов, первый вопрос берётся из первой половины списка вопросов к экзамену (1-8), второй вопрос — из второй половины списка (9-17). Исчерпывающий и верный ответ на каждый вопрос оценивается в 15 баллов.

#### Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** если студент продемонстрировал владение более 80% учебного материала по дисциплине.
- **17-24 баллов** если студент продемонстрировал владение от 60% до более 79% учебного материала по дисциплине.
- **10-16 баллов** если студент продемонстрировал владение от 45% до более 59% учебного материала по дисциплине.
- **1-10 баллов** если студент продемонстрировал владение менее 45% учебного материала по дисциплине.

Образец экзаменационных билетов представлен в приложении 4

### **Задачи для рубежного контроля.**

Дисциплина разбита на два модуля. По каждому модулю имеется свой список задач для самостоятельного решения. По первому модулю 33 задачи, по второму модулю 48 задач. Задачи доставляются студенту в режиме онлайн через университетский сервер WebWork

<http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>

За рубежный контроль студент может получить до 30 баллов, по 15 баллов за каждый модуль. Примеры задач для рубежного контроля по двум модулям представлены в приложении 3.

### **Работа в аудитории и у доски.**

Работа у доски состоит в выборочном разборе отдельных задач, аналогичных тем, что студенты получают в режиме онлайн через университетский сервер WebWork. Решение задачи сопровождается обсуждением теории. За каждый модуль студент выходит к доске как минимум 1 раз. При этом знание теории оценивается в 5 баллов, решение задач в 10 баллов, реплики с места, дополнения, пояснения в 5 баллов. Суммарно по 20 баллов за каждый из двух модулей.

### **4.3. Рейтинг-план дисциплины.**

Рейтинг-план дисциплины представлен в приложении 2.

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература:**

1. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 1996, С. 146. ISBN 978-5-7477-0099-5 [Электронный ресурс] — Электронная версия печ. публикации .— <URL: [https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov\\_Kurs\\_linejnoj\\_algebry\\_up\\_1996.pdf](https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov_Kurs_linejnoj_algebry_up_1996.pdf)>.

2. Гайдамак О. Г., Силова Е. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2012, С. 96. [Электронный ресурс] — Электрон. версия печ. публикации .—<URL: <https://elib.bashedu.ru/dl/read/GaidamakSilovaAnalit.Geometriy i LineinayAlgebraUPos.2012.pdf/info>>.

### Дополнительная литература:

3. Ахметвалиева Э. Н., Ахтямов А. М. Математика. Ч. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2010 — Электрон. версия печ. публикации. — <URL: <https://elib.bashedu.ru/dl/read/AhmetvalievaAhtymovaMatematika1Uch.pos.2010.pdf>>.

3.1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник для физ.-мат. спец. вузов / П. С. Александров . — СПб. : Лань, 2009 .— 512 с. : ил. — ISBN 978-5-8114-0908-2 .— <URL:[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=493](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=493)>.

### 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

4. Университетский сервер WebWork на сайте БашГУ: <http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>.

5. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Онлайн учебник: <URL: <http://freetextbooks.narod.ru/r4-b2.htm>>.

### 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

<i>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</i>	<i>Вид занятий</i>	<i>Наименование оборудования, программного обеспечения</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Аудитория 01, 02, 301 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Лекции</i>	Доска
Аудитория 322, 318, 216 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Практические занятия</i>	Доска
Библиотека, читальные залы	<i>Самостоятельная работа</i>	Интернет, университетский сервер WebWork

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Линейная алгебра на 2 семестр

очная

форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	49,2
лекций	32
практических/ семинарских	16
лабораторных	0
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	33
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	61,8

Форма контроля:  
экзамен 2 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР /СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Модуль 1</b>								
1.	Матричное решение уравнения $i^2=-1$ . Комплексные числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение в степень и извлечение корней. Комплексный логарифм и комплексная экспонента. Линейное векторное пространство (ЛВП). Определение и примеры ЛВП. Аксиомы ЛВП и простейшие следствия из них. Понятие подпространства. Линейная зависимость и независимость систем векторов в ЛВП. Свойства линейной зависимости. Теорема Штейница.	4	2	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 1-8 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
2.	Системы векторов и их линейные оболочки. Порождающие системы векторов. Свойства минимальности и линейной независимости порождающих систем. Базисы и размерность ЛВП. Свойства размерности. Теорема о дополнении базиса. Базисы и координатное представление векторов, верхние и нижние	4	2	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 9-16 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	индексы. Замена базисов в ЛВП. Матрицы перехода. Связь матриц прямого и обратного переходов. Преобразование координат вектора при замене базисов.							
3.	Отображения. Область определения и область значений отображения. Образы и полные прообразы отдельных элементов и подмножеств. Множество значений отображения. Сюръективность, инъективность и биективность отображений. Композиция отображений. Тожественное отображение. Понятие об обратном отображении. Сужение и продолжение отображений. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Критерии инъективности и сюръективности линейных отображений к терминах ядра и образа. Линейность отображения, обратного линейному и биективному отображению. Теорема о линейной независимости прообразов линейно независимых векторов. Изоморфизм линейных векторных пространств. Теорема о совпадении размерностей изоморфных пространств. Базисы и изоморфизм общих линейных векторных пространств пространствам $\mathbb{K}^n$ , где $\mathbb{K}$ — поле.	4	2	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 17-24 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
4	Матрица линейного отображения. Матрица составного отображения (композиции). Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов в области определения и в области значений. Задача о приведении матрицы линейного отображения к почти диагональному виду. Теорема о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения. Вычисление ядра и образа линейного отображения.	4	2	0	4,125	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 25-33 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски



	Нахождение пары базисов, диагонализующих матрицу линейного отображения.							
<b>Модуль 2</b>								
5	Линейные операторы. Инъективность, сюръективность и биективность в случае линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Детерминант линейного оператора. Невырожденность и биективность. Алгебраические операции с линейными операторами и их свойства. Коммутатор и антикоммутатор линейных операторов. Инвариантные подпространства линейного оператора. Суммы и пересечения инвариантных подпространств. Одномерные инвариантные подпространства и собственные векторы. Собственные числа и характеристическое уравнение линейного оператора. Корни характеристического уравнения (характеристические числа). Простые и кратные характеристические числа. Задача о приведении матрицы линейного оператора к каноническому виду. Диагонализируемые операторы. Собственные подпространства. Теорема о сумме собственных подпространств, отвечающих различным собственным числам.	4	2	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 1-12 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
6	Кратные собственные числа и корневые подпространства линейного оператора. Две теоремы о сумме корневых подпространств, отвечающих различным собственным числам. Особенности вещественного и комплексного случаев. Цепочки векторов в корневых подпространствах. Начальный и крайний векторы цепочки. Теорема о линейной	4	2	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 6-10 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	<p>независимости цепочек с линейно независимыми крайними векторами и теорема о базисе из цепочек в корневом подпространстве линейного оператора. Жорданов блок, жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли. Линейные функционалы. Алгебраические операции с функционалами и сопряженное пространство. Координатные функционалы и сопряженный базис. Вычисление размерности сопряженного пространства. Ковекторная запись линейных функционалов и скалярное произведение вектора с ковектором. Преобразование координат ковектора при смене базиса. Ортогональные дополнения подпространств в сопряженном пространстве и их размерности. Свойства ортогональных дополнений. Сопряженное отображение.</p>							
7	<p>Билинейные и квадратичные формы. Симметричные билинейные формы. Восстановление симметричной билинейной формы по соответствующей ей квадратичной форме. Компоненты билинейных и квадратичных форм в базисе. Преобразование компонент квадратичной формы при замене базиса. Ядро квадратичной формы и ортогональные дополнения относительно квадратичных форм. Приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду. Нулевой индекс инерции и его связь с размерностью ядра. Сигнатура квадратичной формы (особенности комплексного и вещественного случаев). Положительный и отрицательный индексы инерции в</p>	4	2	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 11-15 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	вещественном случае. Теорема об инвариантности положительного и отрицательного индексов инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности.							
8	Положительные квадратичные формы в роли скалярного произведения. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Понятие длины вектора и угла между векторами. Матрица Грама и ее детерминант. Теорема о дополнении ортонормированного базиса из подпространства до ортонормированного базиса во всем пространстве. Квадратичные формы в евклидовом пространстве. Ограниченность квадратичных форм в конечномерных евклидовых пространствах и их нормы. Экстремальные векторы и диагонализация квадратичной формы в ортонормированном базисе. Диагонализация пары форм, одна из которых положительно определена.	4	2	0	4,125	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 16-20 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
	<b>Всего часов:</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>0</b>	<b>33</b>			

## Приложение 2

Рейтинг-план дисциплины Линейная алгебра

Направление подготовки: 03.03.02 Физика

Курс первый, семестр второй (весенний)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий в модуле	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Работа у доски и в аудитории			0	20
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Решение 33 задач онлайн из первого задания WebWork	15	1	0	15
<b>Модуль 2</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Работа у доски и в аудитории			0	20
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Решение 48 задач онлайн из второго задания WebWork	15	1	0	15
<b>Поощрительные баллы</b>				
Согласно положению о модульно рейтинговой системе			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
Посещение лекционных занятий			0	-6
Посещение семинарских занятий			0	-10
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен	15	2	0	30

/

Образцы задач для рубежного контроля

Из первого задания по WebWork

**Задача 1.1.** Какие из перечисленных ниже подмножеств  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  являются линейными подпространствами  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?

- A) Матрицы размерности  $3 \times 3$  в приведённой ступенчатой форме;
- B) Диагональные матрицы размерности  $3 \times 3$ ;
- C) Матрицы размерности  $3 \times 3$  с нулями в во второй строке;
- D) Симметричные матрицы размерности  $3 \times 3$ ;
- E) Обратимые матрицы размерности  $3 \times 3$ ;
- F) Матрицы размерности  $3 \times 3$  с целыми элементами.

**Задача 1.2.** Пусть  $x, y, z$  — векторы и пусть  $z = -1x - 3y$  и  $w = -2x + 3y - 2z$ . Выберите верные утверждения из приведённого ниже списка.

- A)  $\text{Span}(y) = \text{Span}(w)$ ;
- B)  $\text{Span}(x, y) = \text{Span}(x, w, z)$ ;
- C)  $\text{Span}(y, w) = \text{Span}(z)$ ;
- D)  $\text{Span}(x, z) = \text{Span}(y, w)$ .

**Задача 1.3.** Пусть  $S_1$  — линейное подпространство пространства  $M_4(\mathbb{R})$ , состоящее из всех симметричных матриц. Пусть  $S_2$  — линейное подпространство пространства  $M_5(\mathbb{R})$ , состоящее из всех кососимметричных матриц. Найдите размерности этих подпространств.

Из второго задания по WebWork

**Задача 2.1.** Найдите определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 - i & 4 + 2i \\ 1 + 2i & -1 - 4i \end{bmatrix}.$$

**Задача 2.2.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 12 \\ -16 & 15 \end{bmatrix}.$$

Найдите две различные диагональные матрицы  $D$  и соответствующие матрицы  $S$  такие, что  $A = SDS^{-1}$ .

Образец экзаменационных билетов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

экзаменационный билет № номер скрыт  
по дисциплине «Линейная алгебра» (20\_\_ - \_\_ уч. год)

1. Линейная зависимость и независимость.
2. Матрица линейного отображения.

Преподаватель \_\_\_\_\_ / Шарипов Р. А. /

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Хабибуллин Б. Н. /