

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 9 от «17» апреля 2020 г.  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Ишкин Х.К.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета /института  
\_\_\_\_\_ / Ефимов А.М.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Выпуклый анализ

*(наименование дисциплины)*

Обязательная часть

*(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультатив))*

**программа магистратуры**

Направление подготовки

01.04.01 Математика

*(указывается код и наименование направления подготовки)*

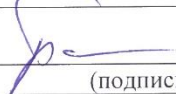
Направленность (профиль) подготовки

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

*(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)*

Квалификация магистр

*(указывается квалификация)*

Разработчик (составитель) доцент, к.ф.-м.н. (должность, ученая степень, ученое звание)	 /Башмаков Р.А. (подпись, Фамилия И.О.)
--	--

Для приема: 2020

Уфа - 2020 г.

## **Список документов и материалов**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
  - 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
  - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
  - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
  - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знания	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	
Умения	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	
Владения (навыки / опыт деятельности)	ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	

## Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Целью учебной дисциплины является:

-формирование у будущих специалистов по анализу представлений о теории выпуклых функций, ее методов;

--формирование практических навыков решения задач по выпуклым функциям. Дисциплина «Выпуклый анализ» входит в Обязательную часть Б1.О.09, изучается в третьем семестре.

Дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как Функциональный анализ, комплексный анализ, Уравнения в частных производных, Математический анализ.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, алгебра, аналитическая геометрия.

## 2. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 3. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код и формулировка компетенции

ОПК-1 - Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Неудовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)

Первый этап (уровень)	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления об основных об историческом значении Теории субгармонических и плюрисубгармонических функций	Неполные представления об основных об историческом значении Теории субгармонических и плюрисубгармонических функций	Уверенное знание основных положений об историческом значении Теории субгармонических и плюрисубгармонических функций преподавателям трудов по изучаемым вопросам; классические методы, применяемые в математическом и алгоритмическом моделировании; необходимые и достаточные условия их реализации
	Знать современное состояние исследуемой проблемы	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления об основных понятиях, идеях, методах,	Неполные представления об основных понятиях, идеях, методах	Полные представления современном состоянии Теории субгармонических и плюрисубгармонических функций

	Знать основные методы решения классических задач математики	Отсутствие знаний	Фрагментарные	Неполные представления	Полные представления
Второй этап (уровень)	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Отсутствие умений	Частичные видения дальнейших путей развития теории	В целом правильные, но содержащие отдельные пробелы видения дальнейших путей развития теории корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	Четкое представление о путях развития теории
	2. Уметь корректно ставить научные задачи	Отсутствие умений	Постановка задачи под руководством и контролем преподавателя	Умение поставить корректно задачу	Сформированное умение
	3. Уметь применять классические методы при решении поставленных задач	Отсутствие умений	Неуверенное применение классических методов	Применение классических методов	Сформированное умение
Третий этап (уровень)	ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и	Отсутствие владений	Владение адекватным математическим аппаратом	В целом уверенное владение адекватным математическим аппаратом	Успешные владения адекватным математическим

	значимых проблем прикладной и компьютерной математики.				ким аппаратом для ведения научно-исследовательской работы
	2. Иметь опыт применения математического аппарата для ведения научно-исследовательской работы	Отсутствие опыта	Наличие опыта НИР	Успешный опыт применения математического аппарата для ведения научно-исследовательской работы	Самостоятельный опыт применения математического аппарата для ведения научно-исследовательской работы

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.**

**Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)		
Первый этап (уровень)	1. Владеть адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы 2. Владеть навыками систематизации и выбора необходимой информации согласно поставленной задачи, основными методами математического и алгоритмического моделирования	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	РГР, экзамен

Второй этап (уровень)	ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	1. Уметь видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения	РГР, экзамен
Третий этап (уровень)	ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	РГР, экзамен

### Вопросы для подготовки к экзамену

Выпуклое множество. Элементарные свойства (пересечение, сумма, образ и прообраз, проекция). Выпуклая оболочка. Выпуклая оболочка компакта.

Внутренность и замыкание выпуклого множества. Размерность выпуклого множества.

Непустота относительной внутренней выпуклого множества.

Теоремы об отделимости (точки от выпуклого множества, двух выпуклых множеств, компакта от выпуклого множества). Существование опорного функционала в граничной точке выпуклого множества.

Поляра множества. Элементарные свойства. Ограниченность множества и принадлежность нуля внутренней его поляры. Поляра эллипсоида. Теорема о второй поляре.

Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном.

Сопряженный конус к полупространству, к сумме конусов.

Крайние точки выпуклого множества. Теорема Минковского о представлении выпуклого компакта в виде выпуклой оболочки множества своих крайних точек.

Выпуклые функции. Определение с помощью надграфика и с помощью неравенства Йенсена.

Сумма и максимум выпуклых функций. Восстановление функции по ее надграфику.

Опорная и индикаторная функции множества, функция Минковского и их выпуклость.

Полунепрерывные снизу функции. Замыкание выпуклой функции.

Функция, сопряженная по Юнгу (функция одной переменной)

Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.

Существование аффинной миноранты у собственной выпуклой функции. Теорема Минковского о представлении собственной замкнутой выпуклой функции в виде верхней грани аффинных минорант.

Субдифференциал выпуклой функции в точке. Теорема Моро--Рокафеллара о субдифференциале суммы выпуклых функций.

Сублинейные функции и опорные к ним линейные. Представление сублинейной функции в виде верхней грани своих опорных.



Субдифференциал сублинейной функции в данной точке.

Ограниченные сублинейные функции.

Производная выпуклой функции по направлению. Однородность и выпуклость производной в зависимости от направления.

Совпадение субдифференциала выпуклой функции в точке и субдифференциала ее производной по направлениям.

Сопряженная функция. Неравенство Юнга. Классическое преобразование Лежандра (Юнга).

Сопряженные к сублинейной и к индикаторной функции.

Вторая сопряженная функция. Теорема Фенхеля--Моро.

## Образцы билетов для проведения экзамена

### Башкирский государственный университет

Кафедра математического анализа

«Выпуклый анализ»

20\_\_-20\_\_ учебный год

Билет № 13

1. Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном.
2. Производная выпуклой функции по направлению. Однородность и выпуклость производной в зависимости от направления.

Заведующий кафедрой,  
д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К..

### Башкирский государственный университет

Кафедра математического анализа

«Выпуклый анализ»

20\_\_-20\_\_ учебный год

Билет № 14

1. Выпуклое множество. Элементарные свойства (пересечение, сумма, образ и прообраз, проекция). Выпуклая оболочка. Выпуклая оболочка компакта.
2. Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном.

Заведующий кафедрой,  
д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К..

### Расчетно-графическая работа по теме «Функция сопряженная по Юнгу (Лежандру)»

#### 4. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

##### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

###### а) основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 Издательство "Лань" 2018. 608с. <https://e.lanbook.com/book/100938?category=910>
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. Издательство "Лань" 2008. 448 С. <https://e.lanbook.com/book/134?category=910>

## **б) дополнительная литература**

3. Юлмухаметов, Р. С. Выпуклый анализ : учеб. пособие / Р. С. Юлмухаметов, К. П. Исаев, К. В. Трунов ; БашГУ .— Уфа : РИЦ БашГУ, 2007 .
4. Б.Н.Пшеничный. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., Наука, 1980
5. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Наука, М., 1988
6. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу М.Физматлит. 2014. 184 с.
7. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.Физматлит. 2006, 352 с.
8. Р.Рокафеллар. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973
- 9.
10. Привалов И.И., «Введение в теорию функций комплексного переменного», СПб.: Лань, 2009. <https://e.lanbook.com/book/322>
11. Евграфов М.А. Аналитические функции. Издательство "Лань" 2008. 448 С. <https://e.lanbook.com/book/134?category=910>

## **5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

### **А. Ресурсы интернет**

1. «Электронная библиотека БашГУ» <http://www.elib.bashedu.ru>
  2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.biblioclub.ru>
  3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://e.lanbook.com>
- в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы: Maple (компьютерный класс)..

### **Б. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины**

1. Windows 8 Russian/. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
2. Microsoft Office Standart 2013 Russian. Договор № 114 от 12ю11ю2014. Лицензии бессрочные.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное), аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное), аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>5. помещения для самостоятельной работы:</b> аудитория № 426 (физмат корпус - учебное), читальный зал №2 (физмат корпус - учебное)</p>	<p align="center"><b>Аудитория № 501</b></p> <p>Учебная мебель, доска настенная меловая, персональный комп. и системный блок /Corei5-4460(3.2)/CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, Презентер LogitechWirelessPresenterR400 (210134000003592), проектор SonyVPL-DX270, экран ручной ViewScreenLotus 244x183 WLO-4304</p> <p align="center"><b>Аудитория №515</b></p> <p>Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Аудитория №426</b></p> <p>Учебная мебель, доска, персональные компьютеры LenovoThinkCentreA70zIntelPentiumE 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., шкаф TLKTWP-065442-G-GY</p> <p align="center"><b>Аудитория №522</b></p> <p>Учебная мебель, доска, персональный компьютер LenovoThinkCentre A70z IntelPentium E 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер LessarLS/LU-H24KB2.</p> <p align="center"><b>Читальный зал №2</b></p> <p>Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>3. Simply Linux x86_64 (лицензионный договор на программное обеспечение Simply Linux 8.2.0 и включенные для него программы для ЭВМ, свободное программное обеспечение)</p> <p>4. Коллекция компиляторов GCC. (лицензия GNU GPL, свободное программное обеспечение).</p> <p>5. Файловый менеджер GNU Midnight Commander (MC). (лицензия GNU GPL, свободное программное обеспечение).</p>
---	--	---

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Выпускной анализ  
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
лекций	12
практических/ семинарских	24
лабораторных	
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем), ФКР	1,7
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	80,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	25,8

Форма(ы) контроля:  
экзамен\_3 семестр

В том числе:  
РГР 3 семестр, контактных часов – 4, часов на самостоятельную работу – 10

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Внутренность и замыкание выпуклого множества. Размерность выпуклого множества.	0,5	1		5	1-8		Зачет экзамен
2.	Непустота относительной внутренности выпуклого множества.	0,5	1		5	1-8	Самостоятельное решение 5. 1.105	Зачет Экзамен
3.	Теоремы об отделимости (точки от выпуклого множества, двух выпуклых множеств, компакта от выпуклого множества). Существование опорного функционала в граничнойточке выпуклого множества.	0,5	1		5	1-8	5 1.120 5. 1.126	Зачет Экзамен
4.	Поляра множества. Элементарные свойства. Ограниченность множества и принадлежность нуля внутренности его поляры. Поляра эллипсоида.	0,5	1		5	1-8	Самостоятельное решение 5. 135 5. 1.167 5. 1.167 5.1.188 5)6	РГР Зачет Экзамен

	Теорема о второй поляре.							
5.	Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном.	0,5	1		5	1-8		экзамен
6.	Теорема Хана-Банаха и ее следствия	0,5	1		5	1-8	5. 2.17 5. 2.9	Экзамен
7.	Сопряженный конус к полупространству, к сумме конусов.	0,5	1		5	1-7	5. 2.108 5. 2.117	Экзамен
8.	Крайние точки выпуклого множества. Теорема Минковского о представлении выпуклого компакта в виде выпуклой оболочки множества своих крайних точек.	0,5	1		5	1-8	5. 2.154 5. 2.181	РГР Экзамен
9.	Выпуклые функции. Определение с помощью надграфика и с помощью неравенства Йенсена.	0,5	1		5	1-8	Самостоятельное изучение (9) гл./ V, § 5 (10) § 36-37	Доклад и подготовленная презентация Экзамен
10.	Сумма и максимум выпуклых функций. Восстановление функции по ее надграфику.	0,5	1		5	1-8	5. 3.9	РГР Зачет
11.	Опорная и индикаторная функции множества,	0,5	1		5	1-8	5. 3.20	Зачет Экзамен

	функция Минковского и их выпуклость.							
12.	Полунепрерывные снизу функции. Замыкание выпуклой функции.	0,5	1		5	1-8		Зачет экзамен
13.	Функция, сопряженная по Юнгу (функция одной переменной)	0,5	1		5	1-8		Зачет Экзамен Доклад
14.	Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.	0,5	1		5	1-8		Зачет Экзамен
15.	Существование аффинной миноранты у собственной выпуклой функции.	0,5	1		5	1-7	Самостоятельное решение 5. 1.96 5. 1.99 5. 5.9	Зачет
16.	Теорема Минковского о представлении собственной замкнутой выпуклой функции в виде верхней грани аффинных минорант.	0,5	1		4,5	1,2,8		Зачет Экзамен
17.	Субдифференциал выпуклой функции в точке. Теорема Моро--Рокафеллара о субдифференциале суммы	0,5	1		4	1,2,8	5. 3.46 5. 3.54 3)	Зачет



	выпуклых функций.							
18.	Сублинейные функции и опорные к ним линейные. Представление сублинейной функции в виде верхней грани своих опорных.	0,5	1		4	1-7	5. 3.74 5. 3.83	РГР Зачет
19.	Субдифференциал сублинейной функции вданной точке.	0,5	1		5	1,2,8	Самостоятельное решение 5. 3.127 5. 3.140 5. 6.20	Доклад и подготовленная презентация
20.	Ограниченные сублинейные функции.	0,5	1		5	1,2,7	5. 8.4 5. 8.10	Экзамен
21.	Производная выпуклой функции по направлению. Однородность и выпуклость производной в зависимости от направления.	0,5	1		4			Доклад
22.	Сопряженная функция. Неравенство Юнга. Классическое преобразование Лежандра (Юнга).	0,5	1		5	1-8	Самостоятельное изучение (10) § 8-10	РГР Экзамен Доклад
23.	Совпадение субдифференциала выпуклой функции в точке и субдифференциала ее производной по направлениям.	0,5	1		5	1-8	5. 4.71 5. 4.77	Экзамен
24.	Сопряженные к сублинейной и к	0,5	1					экзамен

	индикаторной функции.							
	Всего часов	12	24		80,5			

