

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:

на заседании кафедры  
математического анализа  
протокол № 9 от 17 апреля 2020 г.

Зав. кафедрой



/ Х.К. Ишкин

Согласовано:

Председатель УМК факультета математики и  
информационных технологий

 / Ефимов А.М.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина «Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций»

(наименование дисциплины)

—  
Обязательная часть

(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений,  
факультатив))

**программа магистратуры**

Направление подготовки

01.04.01 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки)

Направленность (профиль) подготовки

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» —

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация магистр

(указывается квалификация)

Разработчик (составитель)

доцент, к.ф.-м.н.

(должность, ученая степень, ученое звание)



/Башмаков Р.А.

(подпись, Фамилия И.О.)

Для приема: 2020 года

Уфа 2020 г



## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
  - 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.
  - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
  - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
  - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	<i>Знать ...</i> Основы анализа . <i>Уметь</i> Решать задачи анализа
		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<i>Уметь</i> использовать методы Теории субгармонических и плюрисубгармонических функций в профессиональной деятельности
		ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	<i>Владеть</i> Навыками решения математических и физических задач с использованием Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Целями освоения дисциплины (модуля) " Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций " являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области современной теории комплексного анализа;
- 2) овладение современными методами анализа;

3) формирование практических навыков решения задач анализа. Дисциплина «Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций» является дисциплиной Обязательная часть Б1.О.11 (3-4 семестры)

Дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как Спектральная теория дифференциальных операторов, Обобщенные функции, Выпуклый анализ, Локально-выпуклые пространства, Дополнительные главы функционального анализа, Избранные главы математического анализа, Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: Обобщенные функции, Выпуклый анализ, Избранные главы математического анализа, Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

**4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотношенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.**

Код и формулировка компетенции

ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	<i>Знать ...</i> Основы выпуклого анализа . <i>Уметь</i> Решать задачи выпуклого анализа	Отсутствие знаний	Частичные знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем	Полные и четкие, но содержащие отдельные пробелы знания содержания материала по комплексному анализу, основных методов решения	Полные и четкие знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем преподаваемой

				задач, основных теорем преподаваем ой дисциплины	дисциплины
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессионал ьной деятельности	<i>Уметь</i> использовать методы выпуклого анализа в профессиона льной деятельности	Отсутств ие умений	Фрагментар ные умения решать задачи по преподаваем ой дисциплине, определять корректност ь поставленно й задачи, применять на практике знания по предмету	В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы умения решать задачи по преподаваем ой дисциплине, определять корректност ь поставленно й задачи, применять на практике знания по предмету	Сформирова нное умение решать задачи по преподаваем ой дисциплине, определять корректност ь поставленно й задачи, применять на практике знания по предмету
ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерно й математики	<i>Владеть</i> Навыками решения математических и физических задач с использованием выпуклого анализа	Отсутств ие владений	В целом успешные, но не систематиче ские владения способность ю корректно поставить задачу, классически ми современны ми методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы владения способность ю корректно поставить задачу, классически ми современны ми методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	Успешные владения способность ю корректно поставить задачу, классически ми современны ми методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики		
ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	<i>Знать:</i> Основы выпуклого анализа . <i>Уметь</i> Решать задачи комплексного анализа	РГР, экзамен
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<i>Уметь:</i> использовать методы выпуклого анализа в профессиональной деятельности	РГР, экзамен
ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	<i>Владеть:</i> Навыками решения математических и физических задач с использованием выпуклого анализа	РГР, экзамен

Экзамен является оценочным средством.

Структура экзаменационного билета: билет состоит из 2 вопросов, по 1 из каждой части, на которые условно делится прочитанный в течение семестра лекционный курс.

### Вопросы для подготовки к экзамену

#### Часть 1 (3 семестр)

Гармоническая мера

Примеры субгармонических функций

Выпуклые функции и выпуклые множества

Полунепрерывность

Теория интегрирования и теорема Грина

Гармонические функции их приложения

Определение субгармонической функции. Примеры.

Неравенство Иенсена

Принцип максимума

Субгармонические функции и интеграл Пуассона ...

Метод Перрона и задача Дирихле

Теоремы выпуклости

Мера и интегрирование

Линейные функционалы

Конструкция меры и интеграла Лебега (теорема Ф. Рисса)

Формулировка и доказательство теоремы Рисса о представлении

Гармоническая мера

Функция Грина и формула Пуассона — Иенсена . . .

Гармонические продолжения и наименьшие гармонические мажоранты

## **Часть 2 (4 семестр)**

Теория Неванлинны

Емкостный потенциал и емкость

Полярные множества

Емкость и меры Хаусдорфа

Обобщенный принцип максимума или принцип Фрагмена—Линделёфа

Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции

Аналитические отображения и конструкции комплексных пространств

Плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклые и псевдovoгнутые области и их обобщения

Плюрисубгармонические функции и их свойства

Аппроксимация .

Верхняя огибающая  $psh$  функций

Связь  $psh$  функций с голоморфными функциями



## Вопросы заданий РГР

Построение субгармонических функций с условиями роста вне множеств малой меры

Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции

Принцип Фрагмена—Линделёфа

Гармоническая мера и нулевые множества аналитических функций

Теоремы деления в классах аналитических функций и субгармонические функции

## Образцы билетов для проведения экзамена

**Башкирский государственный университет**

Кафедра математического анализа

«Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций»

20\_\_-20\_\_ учебный год

Билет № 13

1. Определение субгармонической функции. Примеры.

2. Емкостный потенциал и емкость

Заведующий кафедрой,

д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К..

**Башкирский государственный университет**

Кафедра математического анализа

«Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций»

20\_\_-20\_\_ учебный год

Билет № 14

1. Неравенство Иенсена

.2. Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции

Заведующий кафедрой,

д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К..

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

#### а) основная литература

1. Привалов И.И., «Введение в теорию функций комплексного переменного», СПб.: Лань, 2009. <https://e.lanbook.com/book/322>
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. Издательство "Лань" 2008. 448 С. <https://e.lanbook.com/book/134?category=910>

#### б) дополнительная литература

1. А. Садуллаев, Плюрисубгармонические функции, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 1985, том 8, 65–113 <http://mi.mathnet.ru/rus/intf/v8/p65>
2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2-х томах. — М.: Наука, 1976. — 720 с..
3. И. И. Привалов, О некоторых вопросах теории субгармонических и аналитических функций, Матем. сб., 1934, том 41, номер 4, 527–550 <http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v41/i4/p527>
4. Хейман, У. Субгармонические функции = Subharmonic functions / У. Хейман, П. Кеннеди ; под ред. Е. Д. Соломенцева; пер. с англ. В. В. Вавилова .— М. : Мир,
5. Привалов, И.И. Субгармонические функции / И.И. Привалов. — М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. технико-теорет. лит., 1937. — 200 с. — (Математика в монографиях / Под ред. С.Н. Бернштейна и др. Основная серия ; Кн. II)
6. Владимиров В. С., Жаринов В. В., Уравнения математической физики, Физико-математическая литература, М., 2000
7. Юлмухаметов, Ринад Салаватович. Выпуклый анализ : учеб. пособие / Р. С. Юлмухаметов, К. П. Исаев, К. В. Трунов ; БашГУ .— Уфа : РИЦ БашГУ, 2007

### 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы

#### А. Ресурсы интернет

1. «Электронная библиотека БашГУ» <http://www.elib.bashedu.ru>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.biblioclub.ru>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://e.lanbook.com>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы: Maple (компьютерный класс)..

#### Б. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian/. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.

2. Microsoft Office Standart 2013 Russian. Договор № 114 от 12ю11ю2014. Лицензии бессрочные.

.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное), аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное), аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>5. помещения для самостоятельной работы:</b> аудитория № 426 (физмат корпус - учебное), читальный зал №2 (физмат корпус - учебное)</p>	<p align="center"><b>Аудитория № 501</b></p> <p>Учебная мебель, доска настенная меловая, персональный комп. и системный блок /Corei5-4460(3.2)/CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, Презентер LogitechWirelessPresenterR400 (210134000003592), проектор SonyVPL-DX270, экран ручной ViewScreenLotus 244x183 WLO-4304</p> <p align="center"><b>Аудитория №515</b></p> <p>Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Аудитория №426</b></p> <p>Учебная мебель, доска, персональные компьютеры LenovoThinkCentreA70zIntelPentiumE 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., шкаф TLKTWP-065442-G-GY</p> <p align="center"><b>Аудитория №522</b></p> <p>Учебная мебель, доска, персональный компьютер LenovoThinkCentre A70z IntelPentium E 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер LessarLS/LU-H24KB2.</p> <p align="center"><b>Читальный зал №2</b></p> <p>Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>3. Simply Linux x86_64 (лицензионный договор на программное обеспечение Simply Linux 8.2.0 и включенные для него программы для ЭВМ, свободное программное обеспечение)</p> <p>4. Коллекция компиляторов GCC. (лицензия GNU GPL, свободное программное обеспечение).</p> <p>5. Файловыйменеджер GNU Midnight Commander (MC). (лицензия GNU GPL, свободное программное обеспечение).</p>
---	--	--

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ  
 ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины *Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций*

(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	3+4=6/256
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
лекций	12 +18=30
практических/ семинарских	
лабораторных	24+18=42
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем), ФКР	1,2+1,7=2.9
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	45+71,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	25,8+34,8

Форма(ы) контроля:  
 экзамен\_3, 4 семестр  
 РГР 4 семестр

В том числе:  
 РГР 4 семестр, контактных часов – 4, часов на самостоятельную работу – 10

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Принцип максимума	1		2	4	1-8		Зачет экзамен
2.	Субгармонические функции и интеграл Пуассона ...	1		2	4	1-8		Зачет Экзамен
3.	Метод Перрона и задача Дирихле	1		2	4	1-8		Зачет Экзамен
4.	Теоремы выпуклости	1		2	4	1-8		РГР Зачет Экзамен
5.	Мера и интегрирование	1		2	4	1-8		экзамен
6.	Линейные функционалы	1		2	4	1-8		Экзамен
7.	Конструкция меры и	1		2	4	1-7		Экзамен

	интеграла Лебега (теорема Ф. Рисса)							
8.	Формулировка и доказательство теоремы Рисса о представлении	1		2	4	1-8		РГР Экзамен
9.	Гармоническая мера	1		2	4	1-8		Доклад и подготовленная презентация Экзамен
10.	Функция Грина и формула Пуассона — Иенсена . . .	1		3	4	1-8		РГР Зачет
11.	Гармонические продолжения и наименьшие гармонические мажоранты	2		3	5	1-8		Зачет Экзамен
12.	<b>4-й семестр</b>  Теория Неванлинны	2		2	6	1-8		Зачет Экзамен
13.	Емкостный потенциал и	1		2	6	1-7		Зачет

	емкость							
14.	Полярные множества	2		1	6	1,2,8		Зачет Экзамен
15.	Емкость и меры Хаусдорфа	1		2	6	1,2,8		Зачет
16.	Обобщенный принцип максимума или принцип Фрагмена—Линделёфа	2		1	6	1-7		РГР Зачет
17.	Обобщенный принцип максимума или принцип Фрагмена—Линделёфа	1		1	6	1,2,8		Доклад и подготовленная презентация
18.	Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции	2		1	6	1,2,7		Экзамен
19.	Аналитические отображения и конструкции комплексных пространств	1		1	6			Доклад



20.	Плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклые и псевдогогнутые области и их обобщения	2		2	6	1-8		РГР Экзамен Доклад
21.	Аппроксимация .	1		2	6	1-8		Экзамен
22.	Верхняя огибающая psh функций	2		2	6			экзамен
23.	Связь psh функций с голоморфными функциями	1		1	5			
	Всего часов	30		42	45+71,5			

