

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:

на заседании кафедры ИТ и КМ
протокол № 6 от 26 января 2021 г.

Зав. кафедрой  Болотнов А.М.

Согласовано:

Председатель УМК
факультета

 Ефимов А.А.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

дисциплина

Методы граничных элементов и их приложения

часть, формируемая участниками образовательных отношений

ПРОГРАММА БАКАЛАВРИАТА

Направление подготовки (специальность):
09.03.03 — Прикладная информатика

Направленность (профиль) подготовки:
"Информационные и вычислительные технологии"

Квалификация — бакалавр

Разработчик:  Болотнов А.М.

Для приема: 2021 г.

Уфа – 2021

Составитель: доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Болотнов А.М.

Рабочая программа дисциплины *утверждена* на заседании кафедры информационных технологий и компьютерной математики, протокол № 6 от 26 января 2021 г.

Рабочая программа дисциплины *актуализирована* на основании Приказа Минобрнауки России от 26.11.2020 № 1456 "О внесении изменений в федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования", Приказа БашГУ от 09.06.2021 № 770 "О внесении изменений в образовательные программы высшего образования – программы бакалавриата, программы специалитета и программы магистратуры". Ученый совет факультета математики и информационных технологий – протокол № 8 от 15.06.2021 г.

Заведующий кафедрой  Болотнов А.М.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры информационных технологий и компьютерной математики, протокол №___ от _____ 20__ г.

Заведующий кафедрой _____

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры информационных технологий и компьютерной математики, протокол №___ от _____ 20__ г.

Заведующий кафедрой _____

СПИСОК ДОКУМЕНТОВ И МАТЕРИАЛОВ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы.....	5
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	6
4. Фонд оценочных средств по дисциплине.....	6
4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.....	6
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.....	8
4.3. Рейтинг-план дисциплины.....	9
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	14
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	14
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины.....	15
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	15
Приложение 1	17
Приложение 2.....	21

**1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С
УСТАНОВЛЕННЫМИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ИНДИКАТОРАМИ ДОСТИЖЕНИЯ
КОМПЕТЕНЦИЙ**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
	ПК-1: Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.	ПК-1.1. Знает принципы проведения научных исследований; существующие методы обработки информации и анализа полученных результатов.	Демонстрирует знания основных методов граничных элементов.
		ПК-1.2. Умеет проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.	Решает практические задачи с использованием методов граничных элементов.
		ПК-1.3. Владеет навыками проведения исследований под научным руководством в конкретной области профессиональной деятельности.	Имеет практический опыт приведения задач математической физики к граничным интегральным уравнениям.
	ПК-2: Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	ПК-2.1. Знает современные методы разработки алгоритмов, математические модели, языки программирования и пакеты прикладных программ.	Демонстрирует знания методов разработки и реализации алгоритмов решения задач с использованием методов граничных элементов на базе языков программирования.
		ПК-2.2. Умеет разрабатывать алгоритмы математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	Программно реализует алгоритмы решения задач математической физики с использованием методов граничных элементов.
		ПК-2.3. Владеет навыками разработки и алгоритмов на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	Имеет практический опыт разработки и реализации алгоритмов решения интегральных уравнений на базе языков программирования.

2. ЦЕЛЬ И МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Согласно учебному плану, дисциплина "Методы граничных элементов и их приложения" относится к обязательной части (части, формируемой участниками образовательных отношений), дисциплины по выбору. Б1.В.ДВ.04.02.

В соответствии с учебным планом по направлению подготовки 09.03.03 — *Прикладная информатика*, дисциплина изучается по дневной форме обучения на 4 курсе в 7 семестре: по заочной форме обучения — на 4 курсе.

Целью изучения курса "Методы граничных элементов и их приложения" является изучение студентами основных методов решения задач математической физики, основанных на сведениях краевых задач к интегральным уравнениям в двумерной и трехмерной постановке, с использованием современных систем и компиляторов для актуальных языков программирования; формирование у студентов практических навыков разработки программ, реализующих методы граничных элементов.

Изучение дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных в результате освоения студентами предшествующих дисциплин образовательной программы по направлению подготовки 09.03.03 — *Прикладная информатика*: Дискретная математика; Информатика и программирование; Программная инженерия; Вычислительные методы и программирование.

Общие требования к входным знаниям, умениям и навыкам студентов:

1) студенты обладают опытом обучения, необходимым для усвоения знаний, навыков и умений по данной дисциплине, а также для получения дальнейшего образования;

2) соответствие общекультурных и профессиональных знаний, умений и навыков предшествующего процесса освоения образовательной программы требованиям основной образовательной программы по направлению подготовки *Прикладная Информатика*;

3) студенты знают, понимают и способны применять на практике основные положения и сущность разделов предшествующих дисциплин, посвященных вопросам осуществления профессиональной деятельности.

Бакалавр по направлению подготовки 09.03.03 — *Прикладная информатика* готовится к научно-исследовательской и производственно-технологической видам деятельности, связанным с использованием основ прикладной математики, методов программирования, информационно-коммуникационных технологий и автоматизированных систем управления.

Дисциплина "Методы граничных элементов и их приложения" связана общими формируемыми компетенциями с дисциплинами:

- Выполнение и защита выпускной квалификационной работы;
- Имитационное моделирование;
- Интервальный анализ в информационных технологиях;
- Информатика и программирование. Практикум;
- Информационные технологии. Практикум;
- Кроссплатформенные приложения;
- Математические методы принятия решений;
- Машинное обучение и анализ данных;
- Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы);
- Научно-исследовательская работа;

- Нейроинформатика;
- Нечеткая логика;
- Параллельные вычисления;
- Производственная практика;
- Технологическая (проектно-технологическая) практика;
- Учебная практика;
- Численные методы решения задач для ОДУ;
- Численные методы решения задач линейной алгебры;
- Численные методы решения экстремальных задач.

3. СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ (ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ, ТИПЫ И ВИДЫ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ, УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении 1

4. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ПК-1 — Способность проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		Не удовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
ПК-1.1. Знает принципы проведения научных исследований; существующие методы обработки информации и анализа полученных результатов.	Демонстрирует знания основных методов граничных элементов.	Отсутствие знаний или фрагментарные представления об основных методах граничных элементов.	Неполные представления об основных методах граничных элементов.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных методах граничных элементов.	Сформированные систематические представления об основных методах граничных элементов.
ПК-1.2. Умеет проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.	Решает практические задачи с использованием алгоритмов численного решения на основе методов граничных элементов.	Отсутствие умений или фрагментарные умения решать практические задачи с использованием алгоритмов численного решения на основе методов граничных элементов.	В целом успешное, но не систематическое умение решать практические задачи с использованием алгоритмов численного решения на основе методов граничных элементов.	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы, умение решать практические задачи с использованием алгоритмов численного решения на основе методов граничных элементов.	Сформированное умение решать практические задачи с использованием алгоритмов численного решения на основе методов граничных элементов.

ПК-1.3. Владеет навыками проведения исследований под научным руководством в конкретной области профессиональной деятельности.	Имеет практический опыт построения и применения интегральных уравнений для различных типов задач.	Отсутствие или фрагментарное применение интегральных уравнений для различных типов задач.	В целом успешное, но не систематическое применение интегральных уравнений для различных типов задач.	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение интегральных уравнений для различных типов задач.	Успешное и систематическое применение интегральных уравнений для различных типов задач.
---	---	---	--	--	---

ПК-2 — Способность использовать современные методы разработки и реализации алгоритмов конкретных математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		Не удовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
ПК-2.1. Знает современные методы разработки алгоритмов, математические модели, языки программирования и пакеты прикладных программ.	Демонстрирует знания методов разработки и реализации алгоритмов решения задач с использованием методов граничных элементов на базе языков программирования.	Отсутствие знаний или фрагментарные представления о методах разработки и реализации алгоритмов решения задач с использованием методов граничных элементов на базе языков программирования.	Неполные представления о методах разработки и реализации алгоритмов решения задач с использованием методов граничных элементов на базе языков программирования.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о методах разработки и реализации алгоритмов решения задач с использованием методов граничных элементов на базе языков программирования.	Сформированные систематические представления о методах разработки и реализации алгоритмов решения задач с использованием методов граничных элементов на базе языков программирования.
ПК-2.2. Умеет разрабатывать алгоритмы математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	Реализует алгоритмы решения краевых задач на основе граничных элементов на базе языков программирования.	Отсутствие умений или фрагментарные умения реализовывать с помощью языков программирования алгоритмы решения краевых задач на основе граничных интегральных уравнений.	В целом успешное, но не систематическое умение реализовывать с помощью языков программирования алгоритмы решения краевых задач на основе граничных интегральных уравнений.	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы, умение применять и реализовывать с помощью языков программирования алгоритмы решения краевых задач на основе граничных интегральных уравнений.	Сформированное умение реализовывать с помощью языков программирования алгоритмы решения краевых задач на основе граничных интегральных уравнений.
ПК-2.3. Владеет навыками разработки и реализации	Имеет практический опыт разработки и ре-	Отсутствие или фрагментарное применение на-	В целом успешное, но не систематическое примене-	В целом успешное, но содержащее отдельные про-	Успешное и систематическое применение навыков

алгоритмов решения задач на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	лизации алгоритмов решения краевых задач с использованием методов граничных элементов.	выков разработки и реализации алгоритмов решения краевых задач с использованием методов граничных элементов.	ние навыков реализации алгоритмов решения краевых задач с использованием методов граничных элементов.	белы применение навыков реализации алгоритмов решения краевых задач с использованием методов граничных элементов.	реализации алгоритмов решения краевых задач с использованием методов граничных элементов.
---	--	--	---	---	---

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ПК-1.1. Знает принципы проведения научных исследований; существующие методы обработки информации и анализа полученных результатов.	Демонстрирует знания об основных методах граничных элементов.	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
ПК-1.2. Умеет проводить под научным руководством исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.	Решает практические задачи математической физики с использованием методов граничных элементов.	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
ПК-1.3. Владеет навыками проведения исследований под научным руководством в конкретной области профессиональной деятельности.	Имеет практический опыт применения методов граничных элементов в конкретной области профессиональной деятельности.	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
ПК-2.1. Знает современные методы разработки алгоритмов, математические модели, языки программирования и пакеты прикладных программ.	Демонстрирует знания методов разработки и реализации алгоритмов решения краевых задач математической физики с использованием интегральных уравнений на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
ПК-2.2. Умеет разрабатывать алгоритмы математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	Реализует методы решения краевых задач математической физики с использованием методов граничных элементов.	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
ПК-2.3. Владеет навыками разработки и реализации алгоритмов на базе языков программирования и пакетов прикладных программ.	Имеет практический опыт разработки и реализации алгоритмов решения краевых задач математической физики с использованием методов граничных элементов.	Лабораторные работы; реферат; экзамен.

Критериями оценивания при *модульно-рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкала оценивания для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

4.3. Рейтинг-план дисциплины

Рейтинг-план дисциплины представлен в Приложении 2

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Структура экзаменационного билета: 2 вопроса. Первый вопрос — теоретический, второй — практический.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНА

1. Этапы математического моделирования процессов. Роль вычислительного эксперимента в исследованиях процессов. Типы рассматриваемых полей. Аналогии между физическими величинами в различных скалярных потенциальных полях. Методы решения краевых задач для уравнений математической физики.
2. Постановки краевых задач. Оператор Лапласа в различных системах координат. Определение расстояния и производной по нормали к границе области. Формулы Грина. Свойства гармонических функций.
3. Элементы теории потенциалов. Потенциал объемных масс или зарядов и его свойства. Логарифмический потенциал и его свойства.
4. Поверхностные потенциалы. Потенциал простого слоя в пространстве и на плоскости, и его свойства. Потенциал двойного слоя в пространстве и на плоскости, и его свойства.
5. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным граничным интегральным уравнениям методом потенциалов. Внутренние и внешние задачи Дирихле в пространстве и на плоскости.
6. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным граничным интегральным уравнениям методом потенциалов. Внутренние и внешние задачи Неймана в пространстве и на плоскости.
7. Применение основной интегральной формулы Грина для построения граничного интегрального уравнения, эквивалентного третьей краевой задаче для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.
8. Сведение внутренних и внешних краевых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями первого, второго и третьего рода к эквивалентным граничным интегральным уравнениям в пространстве и на плоскости.
9. Метод функций Грина. Вторая формула Грина. Определение и свойства функций Грина.
10. Построение граничного интегрального уравнения методом функций Грина для краевой задачи в односвязной области с прямоугольной внешней и произвольной внутренней границами.
11. Метод конечных интегральных преобразований. Понижение размерности задач, определяющих функции Грина в прямоугольных и круговых областях. Интегральное преобразование Фурье. Суммирование рядов Фурье.
12. Краевая задача для уравнения Лапласа в области с кусочно-однородной средой. Граничные условия 4-го рода. Система интегральных уравнений по подобластям.
13. Граничная задача для уравнения эллиптического типа в многосвязной области с концентрическими внутренними границами. Построение функций Грина. Алго-

ритм решения задачи для функций Грина.

14. Нелинейная краевая задача для уравнения Лапласа. Задача с граничными условиями, выраженными немонотонными зависимостями. Аппроксимация граничных условий. Построение нелинейного интегрального уравнения. Об отсутствии единственности решения. Тестовая задача в кольцевой области.
15. Системы интегральных уравнений и методы Шварца-Неймана. Альтернирующий метод Шварца. Объединение областей.
16. Методы Шварца-Неймана. Пересечение областей. Понятие о методе фиктивных областей. Применение к решению задач.
17. Классификация интегральных уравнений. Виды интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма.
18. Численные методы решения интегральных уравнений. Метод последовательных приближений. Метод конечных сумм. Условия сходимости методов.
19. Численные методы решения интегральных уравнений: метод вырожденных ядер; метод коллокаций; метод наименьших квадратов; метод моментов. Комбинированные методы решения трехмерных задач.

ОБРАЗЕЦ ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Направление подготовки 09.03.03 - *Прикладная информатика*
Дисциплина *Методы граничных элементов и их приложения*
7 сем. 20__-__ учебного года

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 15

1. Классификация интегральных уравнений. Виды интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма.

2. Для краевой задачи:

$$\Delta u = -\frac{I}{\sigma} \delta(p, q_1); \quad p \in \Omega, \quad (1) \quad \left(u + c_0 \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = \varphi(p); \quad p \in S,$$

$p = (x, y) \in S$ — точка на границе S (окружности радиуса R);

$q_1 = (x_1, y_1) \in \Omega$ — координаты точечного источника с интенсивностью I (20; 40); σ — проводимость среды (1; 10; 100);

c_0 — сопротивление внешней границы (0.05; 0.5; 5);

$\varphi(p) = |\cos(\alpha)|$ — заданная функция на внешней границе S , ($0 \leq \alpha < 2\pi$).

- построить граничное интегральное уравнение, используя основную интегральную формулу Грина:

- решить интегральное уравнение методом конечных сумм и получить значения неизвестной функции $u(p)$ в любой точке p области Ω .

Зав. Кафедрой

А.М. Болотнов

Перевод оценки из 100-балльной шкалы в четырех-балльную производится следующим образом:

«отлично» — от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);

«хорошо» — от 60 до 79 баллов;

«удовлетворительно» — от 45 до 59 баллов;

«неудовлетворительно» — менее 45 баллов.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ (В БАЛЛАХ)

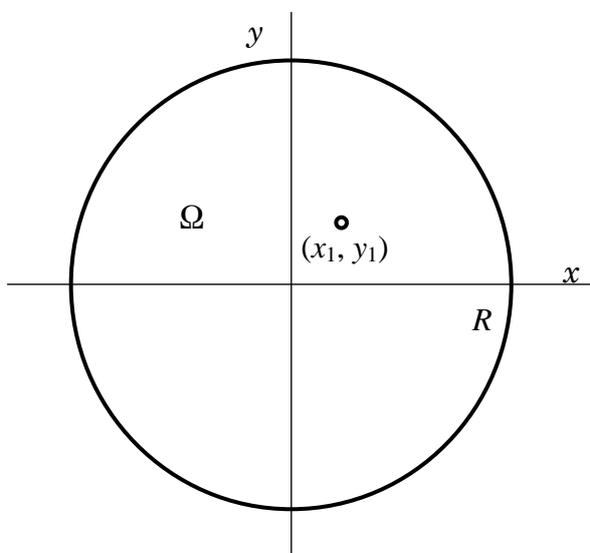
25 – 30 баллов выставляется студенту, если он дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

17 – 24 баллов выставляется студенту, если он раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.

10 – 16 баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы им допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.

1 – 10 баллов выставляется студенту, если его ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

ПРИМЕРЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ



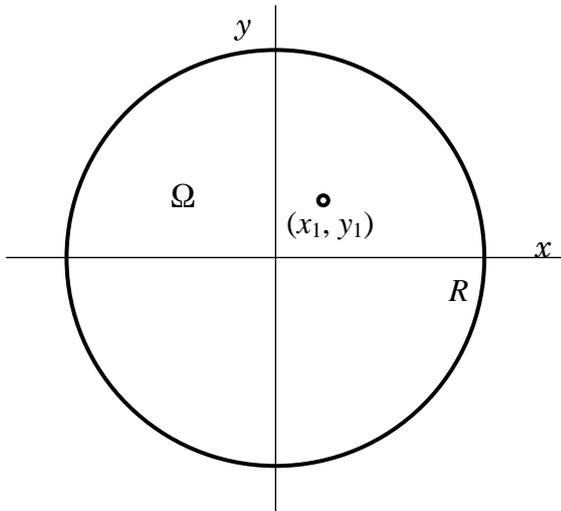
$$\Delta u = -\frac{I}{\sigma} \delta(p, q_1); \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left(u + c_0 \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = \varphi(p); \quad p \in S, \quad (2)$$

$p = (x, y) \in S$ — точка на границе S (окружности радиуса R); $q_1 = (x_1, y_1) \in \Omega$ — координаты точечного источника с интенсивностью I (20; 40); σ — проводимость среды (1; 10; 100); c_0 — сопротивление внешней границы (0.05; 0.5; 5); $\varphi(p) = |\cos(\alpha)|$ — заданная функция на внешней границе S . ($0 \leq \alpha < 2\pi$).

Построить граничное интегральное уравнение для задачи (1), (2), используя основную интегральную формулу Грина.

Решить интегральное уравнение методом конечных сумм и получить значения неизвестной функции $u(p)$ в любой точке p области Ω .



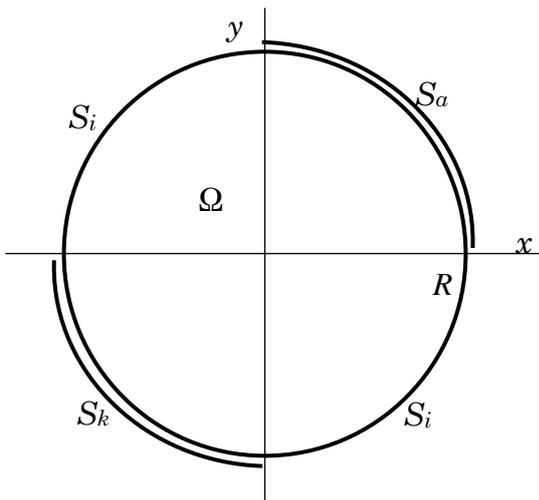
$$\Delta u = -\frac{I}{\sigma} \delta(p, q_1); \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_S = \varphi(p); \quad p \in S, \quad (2)$$

$p = (x, y) \in S$ — точка на границе S (окружности радиуса R); $q_1 = (x_1, y_1) \in \Omega$ — координаты точечного источника с интенсивностью I (20; 40); σ — проводимость среды (1; 10; 100); $\varphi(p) = |\cos(\alpha)|$ — заданная функция на внешней границе S , ($0 \leq \alpha < 2\pi$).

Построить граничное интегральное уравнение для потенциала двойного слоя.

Решить интегральное уравнение методом конечных сумм и получить значения неизвестной функции $u(p)$ в любой точке p области Ω .



$$\Delta u = 0; \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left(u + c_a \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S_a} = \varphi_a; \quad p \in S_a, \quad (2)$$

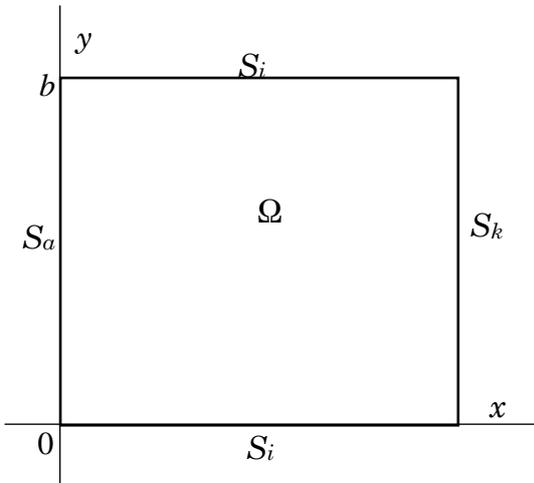
$$\left(u + c_k \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S_b} = 0; \quad p \in S_b, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_c} = 0; \quad p \in S_c, \quad (4)$$

$p = (x, y) \in S$ — точка на границе S (окружности радиуса R); σ — проводимость среды (20; 200); c_a, c_k — сопротивление границ анода и катода (0.05; 0.5); φ_a — задана (10; 100).

Построить граничное интегральное уравнение для задачи (1) – (4), используя основную интегральную формулу Грина.

Решить интегральное уравнение методом конечных сумм и получить значения неизвестной функции $u(p)$ в любой точке p области Ω .



$$\Delta u = 0; \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left(u + c_a \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S_a} = \varphi_a; \quad p \in S_a, \quad (2)$$

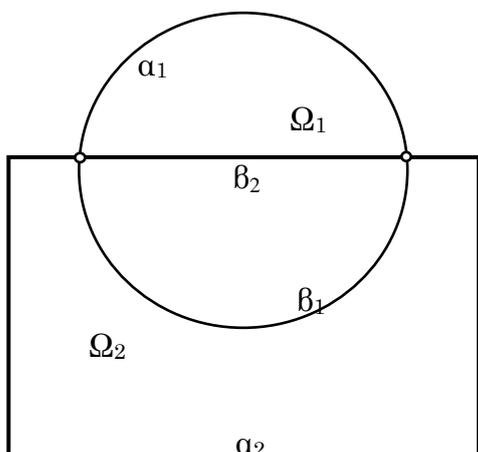
$$\left(u + c_k \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{S_b} = 0; \quad p \in S_b, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_c} = 0; \quad p \in S_c, \quad (4)$$

σ — проводимость среды (1; 10; 100); c_a, c_k — сопротивление границ анода и катода (0.05; 0.5; 5); φ_a — задана (20; 40; 80).

Построить граничное интегральное уравнение для задачи (1) – (4), используя основную интегральную формулу Грина.

Решить интегральное уравнение методом конечных сумм и получить значения неизвестной функции $u(p)$ в любой точке p области Ω .



$$\Delta u = 0; \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\alpha_1} = \varphi_1(p), \quad (2)$$

$$u|_{\alpha_2} = \varphi_2(p), \quad (3)$$

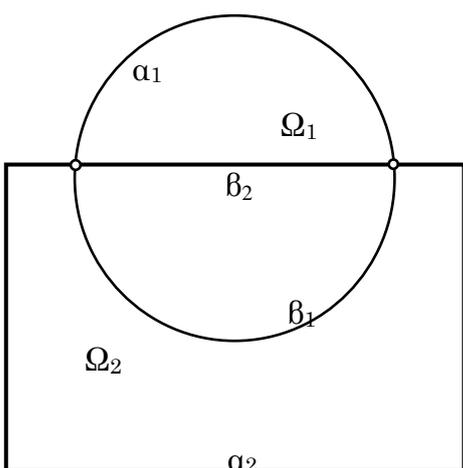
$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad \varphi_1(p) = |\cos(\gamma)|,$$

$$0 \leq \gamma < \pi \text{ — угол; } \varphi_2(p) \equiv 1.$$

Методом Шварца решить задачу (1) – (3) для любой точки p в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задачу в каждой из подобластей решить методом граничных интегральных уравнений на основе потенциала двойного слоя.

Интегральные уравнения решить методом конечных сумм.



$$\Delta u = 0; \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\beta_1} = \varphi_1(p), \quad (2)$$

$$u|_{\beta_2} = \varphi_2(p), \quad (3)$$

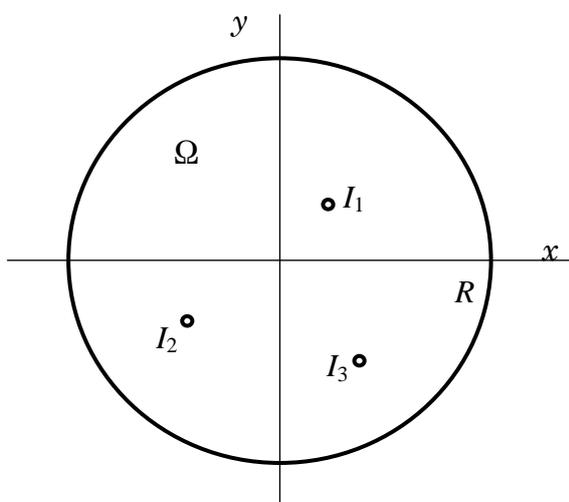
$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2; \quad \varphi_1(p) = |\cos(\gamma)|,$$

$$0 \leq \gamma < \pi \text{ — угол; } \varphi_2(p) \equiv 1.$$

Методом Неймана решить задачу (1) – (3) для любой точки p в области $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Задачу в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 решить методом граничных интегральных уравнений на основе потенциала двойного слоя.

Интегральные уравнения решить методом конечных сумм.



$$\Delta u = -\frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^3 I_k \delta(p, q_k); \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_S = \varphi(p); \quad (2)$$

$p = (x, y) \in S$ — точка на границе S (окружности радиуса R); $q_k = (x_k, y_k) \in \Omega$ — координаты точечных источников с интенсивностями I_k (10; 20; 40); σ — проводимость среды (1; 10; 100); $\varphi(p) = |\sin(\alpha)|$ — заданная функция на внешней границе S , ($0 \leq \alpha < 2\pi$).

Построить граничное интегральное уравнение для потенциала двойного слоя.

Решить интегральное уравнение методом конечных сумм и получить значения неизвестной функции $u(p)$ в любой точке p области Ω .

За отчёт по лабораторной работе выставляется:

- 10 баллов, если работа выполнена без замечаний и в указанный срок;
- 8 баллов, если по работе имеются несущественные замечания, или работа сдана позже указанного срока более чем на 1 неделю;
- 6 баллов, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания, или работа сдана позже указанного срока более чем на 2 недели.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

Самостоятельная работа студентов заключается в подготовке к занятиям и выполнении зачетных заданий с использованием рекомендованной учебно-методической литературы. В качестве дополнительных заданий предлагаются темы рефератов:

- Типы краевых условий для уравнений математической физики. Основные численные методы решения граничных задач.
- Элементы теории потенциалов. Потенциал объемных масс и его свойства. Логарифмический потенциал.
- Поверхностные потенциалы. Потенциал простого и двойного слоя в пространстве и на плоскости; его свойства.
- Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным граничным интегральным уравнениям методом потенциалов. Внутренние и внешние задачи Дирихле в пространстве и на плоскости.
- Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным граничным интегральным уравнениям методом потенциалов. Внутренние и внешние задачи Неймана в пространстве и на плоскости.
- Численные методы решения граничных интегральных уравнений. Методы вырожденных ядер, коллокаций, наименьших квадратов, моментов. Примеры комбинирования методов граничных элементов с методами конечных элементов.

За выполненный реферат выставляется:

- 10 баллов, если по содержанию реферата нет замечаний;
- 8 баллов, если по содержанию реферата имеются несущественные замечания;
- 6 баллов, если по содержанию реферата имеются существенные замечания.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010. 400 с.
2. Болотнов А.М. Методы граничных элементов в расчетах электрических полей электрохимических систем. Уфа: РИО БашГУ, 2002. 144 с.
3. Васильева А.Б. Интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учебник. СПб.: Лань, 2009. 160 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

4. Батчер М., Фарина М. Go на практике. Издательство "ДМК Пресс". 2017. 374 с.
<https://e.lanbook.com/book/97351?category=1557>
5. Болотнов А.М. Разработка программных приложений в среде BlackBox: учебное пособие. Издательство "Лань". 2018. 144 с.
<https://e.lanbook.com/book/109615?category=1557>
6. Мэйерс С. Эффективное использование C++. 55 верных способов улучшить структуру и код ваших программ. Издательство "ДМК Пресс". 2008. 300 с.
<https://e.lanbook.com/book/1245?category=1557>
7. Саммерфильд М. Программирование на Go. Разработка приложений XXI века. Издательство "ДМК Пресс". 2013. 580 с.
<https://e.lanbook.com/book/69944?category=1557>
8. Стивенс Р. Delphi. Готовые алгоритмы. Издательство "ДМК Пресс". 2007. 384 с.
<https://e.lanbook.com/book/1234?category=1557>

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

- Электронная библиотечная система «ЭБ БашГУ» - <https://elib.bashedu.ru/>
- Электронная библиотечная система издательства «Лань»
<https://e.lanbook.com/>
- Электронный каталог Библиотеки БашГУ - <http://www.bashlib.ru/catalogi/>
- Научная электронная библиотека eLibrary.ru (доступ к электронным научным журналам) - https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Оборудование	Программное обеспечение
<p>1. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа: аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 531 (физмат корпус- учебное), аудитория № 528 (физмат корпус- учебное).</p> <p>2. Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа: аудитория № 520а (физмат корпус - учебное), № 521 (физмат корпус- учебное), аудитория № 522 (физмат корпус- учебное).</p> <p>3. Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций: аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 531 (физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (физмат корпус- учебное).</p> <p>4. Учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации: аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 531 (физмат корпус- учебное), аудитория № 528 (физмат корпус</p>	<p>Аудитория № 501. Учебная мебель, доска настенная меловая, персональный компьютер и системный блок /Core i5-4460 (3.2) /CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, Презентер Logitech Wireless Presenter R400 (210134000003592), проектор Sony VPL-DX270, экран ручной View Screen Lotus 244 x 183 WLO-4304.</p> <p>Аудитория № 531. Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (210 106 8 302), доска аудиторная ДА32.</p> <p>Аудитория № 528. Учебная мебель, доска настенная меловая.</p> <p>Аудитория № 520а. Учебная мебель, доска, монитор LG 19 L 1942S SF 1280 x 1024, 5ms, 8000:1, black (3,4 кг, VGA, 19" (48,3 см) 5мс, мониторы LG 19" L1942 SBF 1280 x 1024, 5ms, 8000:1, black 10 шт., системный блок HP Pavilion Slimline S 3500 F AMD Athlon 64 X2 5400+/2.8GHz, 4Gb, 500Gb 12 шт., доска аудиторная ДА36.</p> <p>Аудитория № 521. Учебная мебель, доска, коммутатор HPV 1905 - 24 Switch 24*10 / 100 + 2*10/100/1000, персональные компьютеры в комплекте DEPO Neos 460 MD i5 2300 / 4G DDR 1333 / T500G/ DVD W – 12 шт., проектор Optoma EX 542i. DLP 3D. XGA (1024*768). 2700 ANSI Lm. 3000 l. Lamp 5000 +/- 40 ver, шкаф TLKTWP-065442-G-GY, экран на штативе Draper Diplomat (1:1) 84/84 * 213*213 MW, доска аудиторная ДА36.</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06. 2013 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11. 2014 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>3. Simply Linux x86_64 Лицензионный договор на программное обеспечение Simply Linux 8.2.0 и включенные для него программы для ЭВМ, свободное программное обеспечение).</p> <p>4. Коллекция компиляторов GCC (лицензия GPL, свободное программное обеспечение).</p> <p>5. Файловый менеджер GNU Midnight Commander (MC) (лицензия GPL, свободное программное</p>

<p>- учебное).</p> <p>5. Помещения для самостоятельной работы: аудитория № 426 (физмат корпус - учебное), читальный зал № 2 (физмат корпус - учебное).</p> <p>6. Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования: аудитория № 522 (физмат корпус- учебное).</p>	<p>Аудитория № 522: лаборатория компьютерного моделирования. Учебная мебель, доска, персональный компьютер Lenovo Think Centre A70 z Intel Pentium E5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер Lessar LS/ LU-H24KB2.</p> <p>Аудитория № 426. Учебная мебель, доска, персональные компьютеры, системный блок /Core i5-7400 (3.0) / 8Gb/ HDD 1Tb / 450W/ Win 10 Pro/ Клавиатура USB/ Мышь USB/ LCD Монитор 21,5" – 14 шт.</p> <p>Читальный зал № 2. Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>	<p>обеспечение).</p> <p>6. Academic Edition Networked Volume Licenses RAD Studio XE3 Professional Concurrent App Wave English; Договор № 263 от 07.12. 2012 г. Лицензия бессрочная.</p>
---	--	---

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
 ФГБОУ ВО "БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины
 МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
на 7 семестр

Очная форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	73,2
лекций	18
практических/ семинарских	0
лабораторных	54
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	45
Учебных часов на подготовку к экзамену (контроль)	25,8

Формы контроля: экзамен 7 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	П	ЛР	СРС			
1	Этапы математического моделирования процессов. Роль вычислительного эксперимента в исследованиях процессов. Типы рассматриваемых полей. Аналогии между физическими величинами в потенциальных полях.	1		4	2	1, 3	Задание 1	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
2	Постановки краевых задач. Оператор Лапласа в различных системах координат. Определение расстояния и производной по нормали к границе области. Формулы Грина. Свойства гармонических функций. Потенциал объемных масс или зарядов и его свойства.	1		4	4	1, 2, 3	Задание 1	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
3	Поверхностные потенциалы. Потенциалы простого и двойного слоя в пространстве и на плоскости, и их свойства. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным граничным интегральным уравнениям методом потенциалов.	1		6	4	1, 2, 3	Задание 2	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
4	Внутренние и внешние задачи Неймана в пространстве и на плоскости. Применение интегральной формулы Грина для построения граничного интегрального уравнения, эквивалентного третьей краевой задаче для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.	2		4	4	1, 2	Задание 2	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
5	Сведение внутренних и внешних краевых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями первого, второго и третьего рода к эквивалентным граничным интегральным уравнениям в пространстве и на плоскости.	1		4	4	2, 3	Задание 3	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
6	Метод функций Грина. Вторая формула Грина. Определение и свойства функций Грина. Построение граничного интегрального уравнения методом функций Грина для краевой задачи в неодносвязной области с прямоугольной внешней и произвольной внутренней границами.	2		6	4	1, 2, 3	Задание 3	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
7	Метод конечных интегральных преобразований. Понижение размерности задач, определяющих функции Грина в прямоугольных и круговых областях. Интегральное преобразование Фурье. Суммирование рядов Фурье.	1		4	4	1, 4	Задание 4	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
8	Краевая задача для уравнения Лапласа в области с кусочно-однородной средой. Граничные условия 4-го рода. Система интегральных уравнений по подобластям.	2		4	4	1, 4	Задание 4	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
9	Граничная задача для уравнения эллиптического типа в многосвязной области с концентрическими внутренними границами. Построение функций Грина. Алгоритм решения задачи для функций Грина.	1		6	4	1, 3	Задание 5	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
10	Нелинейная краевая задача для уравнения Лапласа с граничными условиями, выраженными немонотонными зависимостями. Построение нелинейного интегрального уравнения. Системы интегральных уравнений и методы Шварца-Неймана. Альтернирующий метод Шварца.	2		4	4	1, 4	Задание 5	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
11	Методы Шварца-Неймана. Пересечение областей. Понятие о методе фиктивных областей. Применение к решению задач. Классификация интегральных уравнений. Виды интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма.	2		4	4	1, 2	Задание 6	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
12	Методы решения интегральных уравнений: метод последовательных приближений; конечных сумм; вырожденных ядер; коллокаций; наименьших квадратов; моментов. Комбинированные методы решения трехмерных задач.	2		4	3	1, 4	Задание 6	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
	Итого за семестр:	18		54	45			

Заочная форма обучения

Вид РАБОТЫ	ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	17,2
лекций	4
практических/ семинарских	0
лабораторных	12
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	117,8
Учебных часов на подготовку к экзамену (контроль)	9

Формы контроля: экзамен — курс 4, летняя сессия.

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	П	ЛР	СРС			
1	Этапы математического моделирования процессов. Роль вычислительного эксперимента в исследованиях процессов. Типы рассматриваемых полей. Аналогии между физическими величинами в потенциальных полях.	1		1	6	1, 3	Задание 1	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
2	Постановки краевых задач. Оператор Лапласа в различных системах координат. Определение расстояния и производной по нормали к границе области. Формулы Грина. Свойства гармонических функций. Потенциал объемных масс или зарядов и его свойства.	—		1	8	1, 2, 3	Задание 1	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
3	Поверхностные потенциалы. Потенциалы простого и двойного слоя в пространстве и на плоскости, и их свойства. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным граничным интегральным уравнениям методом потенциалов.	—		1	8	1, 2, 3	Задание 2	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
4	Внутренние и внешние задачи Неймана в пространстве и на плоскости. Применение интегральной формулы Грина для построения граничного интегрального уравнения, эквивалентного третьей краевой задаче для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.	1		1	12	1, 2	Задание 2	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
5	Сведение внутренних и внешних краевых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями первого, второго и третьего рода к эквивалентным граничным интегральным уравнениям в пространстве и на плоскости.	—		1	8	2, 3	Задание 3	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
6	Метод функций Грина. Вторая формула Грина. Определение и свойства функций Грина. Построение граничного интегрального уравнения методом функций Грина для краевой задачи в неодносвязной области с прямоугольной внешней и произвольной внутренней границами.	—		1	12	1, 2, 3	Задание 3	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
7	Метод конечных интегральных преобразований. Понижение размерности задач, определяющих функции Грина в прямоугольных и круговых областях. Интегральное преобразование Фурье. Суммирование рядов Фурье.	1		1	8	1, 4	Задание 4	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
8	Краевая задача для уравнения Лапласа в области с кусочно-однородной средой. Граничные условия 4-го рода. Система интегральных уравнений по подобластям.	—		1	12	1, 4	Задание 4	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
9	Граничная задача для уравнения эллиптического типа в многосвязной области с концентрическими внутренними границами. Построение функций Грина. Алгоритм решения задачи для функций Грина.	—		1	8	1, 3	Задание 5	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
10	Нелинейная краевая задача для уравнения Лапласа с граничными условиями, выраженными немонотонными зависимостями. Построение нелинейного интегрального уравнения. Системы интегральных уравнений и методы Шварца-Неймана. Альтернирующий метод Шварца.	1		1	10	1, 4	Задание 5	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
11	Методы Шварца-Неймана. Пересечение областей. Понятие о методе фиктивных областей. Применение к решению задач. Классификация интегральных уравнений. Виды интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма.	—		1	12	1, 2	Задание 6	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
12	Методы решения интегральных уравнений: метод последовательных приближений; конечных сумм; вырожденных ядер; коллокаций; наименьших квадратов; моментов. Комбинированные методы решения трехмерных задач.	—		1	13,8	1, 4	Задание 6	Лабораторные работы; реферат; экзамен.
	Итого за семестр:	4		12	117,8			

Рейтинг–план дисциплины

Методы граничных элементов и их приложения

направление подготовки 09.03.03 — Прикладная информатика.

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1: сведение краевых задач к интегральным уравнениям				
Текущий контроль				
Лабораторная работа 1	10	1	0	10
Лабораторная работа 2	10	1	0	10
Рубежный контроль				
Лабораторная работа 3. Письменный отчет.			0	15
<i>Всего за модуль 1</i>			0	35
Модуль 2: численные методы решения интегральных уравнений				
Текущий контроль				
Лабораторная работа 4	10	1	0	10
Лабораторная работа 5	10	1	0	10
Рубежный контроль				
Лабораторная работа 6. Письменный отчет.			0	15
<i>Всего за модуль 2</i>			0	35
Поощрительные баллы				
Задания повышенной сложности				
Конкурс рефератов			0	10
Публикация статей				
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
Посещение лекционных занятий			0	-6
Посещение лабораторных занятий			0	-10
Итоговый контроль				
Экзамен			0	30
<i>Итого</i>			0	110