

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:
на заседании кафедры
протокол № 6 от 26.01.2021 г.

Согласовано:
Председатель УМК
факультета математики и
информационных технологий

Зав. кафедрой



/ X.K. Ишкин



/ A.M. Ефимов

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Дисциплина Функциональный анализ

(наименование дисциплины)

обязательная часть

Программа бакалавриата

Направление подготовки (специальность)

01.03.01 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки

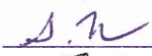
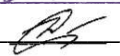
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление», «Преподавание математики и информатики»

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

бакалавр

(указывается квалификация)

<p>Разработчики (составители) д.ф.-м.н., профессор к.ф.-м.н., доцент (должность, ученая степень, ученое звание)</p>	<p> / <u>Гайсин А.М.</u>  / <u>Айткужина Н.Н.</u> (подпись, Фамилия И.О.)</p>
---	---


Для приема: 2021

Уфа - 2021 г.

Составитель / составители: профессор, д.ф.-м.н., Гайсин А.М., доцент кафедры матанализа, к.ф.-м.н. Аиткужина Н.Н.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа протокол № 6 от « 26 » января 2021 г.

Заведующий кафедрой



/ Ишкин Х.К.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры _____

протокол № ____ от « ____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой

_____/_____/

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры _____

протокол № ____ от « ____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой

_____/_____/

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры _____

протокол № ____ от « ____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой

_____/_____/

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	
2. Цели и место дисциплины в структуре ООП ВО	
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	
4.3. Рейтинг-план дисциплины	
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	
Приложение №1: Содержание рабочей программы	
Приложение №2: Рейтинг-план дисциплины	

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знания	1. Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Знать классические постановки задач функционального анализа; методы функционального анализа для применения в смежных областях	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	
Умения	1. Уметь: - доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины,	ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов,	

		теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Уметь: -применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	3. Уметь: применять методы функционального анализа в научно-исследовательской работе	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	
Владения (навыки / опыт деятельности)	1. Владеть: навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Владеть навыками применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	

2. Цели и место дисциплины в структуре ООП ВО

Цели изучения дисциплины:

-ознакомить студентов с основами функционального анализа;
-подготовить их к самостоятельному изучению математической литературы, в которой используется аппарат функционального анализа.

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 3 курсе в 5-6 семестрах.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, комплексный анализ.

Приобретенные знания необходимы для последующего изучения таких дисциплин, как «Уравнения в частных производных», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Численные методы».

3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4. Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)				
		2 «не удовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Первый этап (уровень)	Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного	Фрагментарные представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам	Неполные представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического	Сформированные систематические представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к

	содержания	естественнонаучного содержания	естественнонаучного содержания	знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	дисциплинам естественнонаучного содержания
Второй этап (уровень)	Уметь: - доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины,	Фрагментарные представления о доказательствах утверждений и методах решения задач преподаваемой дисциплины	В целом успешное, но не систематическое использование основных утверждений и методов решения задач преподаваемой дисциплины	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование основных утверждений и методов решения задач преподаваемой дисциплины	Сформированное умение использовать основные утверждения и методы решения задач преподаваемой дисциплины
	Уметь: - применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	Фрагментарные представления о применении полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла	В целом успешное, но не систематическое использование полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла	Сформированное умение использовать полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного цикла
Третий этап (уровень)	Владеть: навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	Фрагментарное использование фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	В целом успешное, но не систематическое применение фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей деятельности	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей деятельности	Успешное и систематическое применение навыков фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей деятельности

		деятельности	профессиональной деятельности	будущей профессиональной деятельности	профессиональной деятельности
--	--	--------------	----------------------------------	---	----------------------------------

ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)				
		2 «не удовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Первый этап (уровень)	Знать: классические постановки задач функционального анализа; методы функционального анализа для применения в смежных областях	Фрагментарные представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях	Неполные представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях	Сформированные систематические представления о классических постановках задач функционального анализа; методах функционального анализа для применения в смежных областях
Второй этап (уровень)	Уметь: применять методы функционального анализа в научно-исследовательской работе	Фрагментарное использование методов функционального анализа в научно-исследовательской работе	В целом успешное, но не систематическое использование методов функционального анализа в научно-исследовательской работе	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование методов функционального	Сформированное умение использовать методы функционального анализа в научно-исследовательской работе

				анализа в научно-исследовательской работе	
Третий этап (уровень)	Владеть навыками применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	Фрагментарное использование основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	В целом успешное, но не систематическое применение основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	Успешное и систематическое применение навыков применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена*: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; *для зачета*: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(*для экзамена*):

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	Доклад на семинаре, экзамен
	Знать: классические постановки задач функционального анализа; методы функционального анализа для применения в смежных областях	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Доклад на семинаре, экзамен
2-й этап Умения	Уметь: - доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины,	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического	Контрольная работа, экзамен

	-применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественно-научного содержания	анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	Уметь: применять методы функционального анализа в научно-исследовательской работе	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Контрольная работа
3-й этап Владеть навыками	Владеть: навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	ОПК-1: готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории	Контрольная работа

		вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	Владеть навыками применения основных методов функционального анализа как к теоретическим проблемам, так и к вопросам прикладного характера	ОПК-3: способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Контрольная работа

4.3 Рейтинг-план дисциплины

Представлен в Приложении 2.

Вопросы для подготовки к экзамену

V семестр

1. Системы множеств (полукольцо, кольцо)
2. Теорема о кольце, порожденном полукольцом.
3. Системы множеств (алгебра, σ -кольцо, σ -алгебра, δ -алгебра. Борелевские множества на прямой.
4. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное кольцо.
5. σ -аддитивная мера и ее свойства.
6. Определение внешней меры и ее свойства.
7. Меры на прямой.
8. Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.
9. Непрерывность внешней меры на измеримых подмножествах.
10. Лебеговское продолжение меры
11. Измеримые функции.
12. Сходимости по мере и почти всюду.
13. Определение интеграла Лебега для простых функций. Свойства. Определение интеграла Лебега.
14. Класс суммируемых функций
15. Предельный переход под знаком интеграла Лебега
16. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

17. Интеграл Стильеса
18. Теорема Радона – Никодима
19. Прямое произведение мер и теорема Фубини
20. Пространства L_1 , L_p ($p > 1$)

VI семестр

21. Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума;
22. Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа;
23. Полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.
24. Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства;
25. Сопряженное пространство, его полнота.
26. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала
27. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах
28. Линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности;
29. Обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе.
30. Компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма – Лиувилля)
31. Гильбертовы пространства: скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы
32. Неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение
33. Неравенства Гельдера и Минковского
34. Пространство $L_2(a,b)$
35. Общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы
36. Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию
37. Спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры

38. Линейные топологические пространства и обобщенные функции: полинормированные пространства; функционал Минковского

39. Нормируемость и метризуемость;

40. Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.

41. Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.

Образец экзаменационного билета

<p>МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА Экзаменационный билет № 1 по курсу «Функциональный анализ»</p> <p>1. Системы множеств (полукольцо, кольцо) (15 баллов) 2. Теорема Радона – Никодима (15 баллов)</p> <p>Зав. кафедрой Ишкин Х.К. / _____ /</p>

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Критерии оценки (в баллах):

*- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без*

затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

*- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;*

*- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;*

*- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.*

Список тем для докладов:

1. Меры на прямой.
2. Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.
3. Непрерывность внешней меры на измеримых подмножествах.
4. Лебеговское продолжение меры
5. Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа;
6. Полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.
7. Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.
8. Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию
9. Нормированные пространства
10. Гильбертовы пространства

Критерии оценки (в баллах):

- 3 балла выставляется студенту за полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.
- 2 балла выставляется студенту в случае, если студент сделал полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий доклад, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.
- 1 балл выставляется студенту в случае, если студент сделал неполный доклад на семинаре на заданную тему и не ответил ни на один дополнительный вопрос.
- 0 баллов выставляется студенту, если им не был сделан доклад на заданную тему.

Задания для контрольной работы**Описание контрольной работы:**

В каждом семестре студенту представляется две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из четырех объемных заданий. Задача считается правильно решенной, если студентом приведено подробное и полное ее решение. Каждое задание оценивается в 3 балла. В случае, если студент не справляется с более 50% заданий по обоим контрольным, он не допускается к сдаче экзамена. У каждого студента есть возможность пересдать контрольную работу.

Пример варианта контрольной работы:**Контрольная работа №1 (5 семестр)****Типовой вариант**

1. Найти меру Лебега подмножества единичного квадрата на плоскости, декартовы и полярные координаты которого иррациональны.

Вычислить интеграл по мере Лебега функции:

2. $f(x) = e^{-[x]}$ по отрезку $[0, \infty)$
3. $f(x) = e^{-[x+1]}$ по отрезку $[0,10)$
4. Пусть множество E на прямой имеет Лебегову меру нуль, должно ли его замыкание иметь меру нуль?

Контрольная работа №2 (5 семестр)**Типовой вариант****Какие из нижеприведенных формул определяют метрику в X :**

1. $\rho(x, y) = \cos^2(x - y)$, $X = R^1$
2. $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \beta_k)$, $X = l^{\infty}$

Выяснить, сходится ли в метрическом пространстве заданная последовательность.**Если сходится, найти предел**

3. $X = C[0,1]$, $x_n = t^n$

$$4. X = l^2, \quad x_n = (1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, \frac{1}{n}, 0, \dots)$$

Контрольная работа №3 (6 семестр)

Типовой вариант

1. Доказать, что $l^p C l^q$ при $p < q$

Можно ли в $C^{(1)}[0, 1]$ ввести нормы следующим образом:

2. $\|x\| = \max|x'(t)|$ на отрезке $[0, 1]$

3. $\|x\| = \max|x'(t)| + x(a)$

4. $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max|x'(t)|$

5. Доказать, что пространство $C[0, \pi]$ не является гильбертовым

Контрольная работа №4 (6 семестр)

Типовой вариант

Проверить являются ли данные функционалы линейными и непрерывными, если да, то найти их нормы.

1. $F(x) = \int_{-2}^2 (t^2 - 1)x(t)dt - x(0); \quad F: C[-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$

2. $F(x) = \int_{-2}^2 (t - 1) \left(t - \frac{3}{2}\right) tx(t)dt; \quad F: L^3(-2; 2) \rightarrow \mathbb{R}$

3. $F(x) = \xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3; \quad F: l^2 \rightarrow \mathbb{R}$

4. $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}; \quad F: l^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Описание методики оценивания:

Критерии оценки (в баллах):

12 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;

9 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

6 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;

3 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно

Задание для РГР

В семестре студенты выполняют РГР

При каких λ применим принцип сжимающих отображений в пространствах $L^2(a, b)$ и $C[a, b]$ к уравнению Фредгольма 2-го рода

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + y(t)?$$

Найти точное решение уравнения. Найти номер итерации N , обеспечивающий точность 0,01 в метрике $C[a, b]$, когда за первое приближение берется $x_0(t) \equiv y(t)$. Заметим, что N определяется из неравенства

$$\frac{\alpha^{N-1}}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1) < 0,01,$$

где α - коэффициент сжатия.

Исходные данные для каждого варианта берутся из следующей таблицы

№№	$K(t, s)$	$y(t)$	a	b	λ	n
1.	$t^2 s$	$\cos 3t$	0	1	1	8
2.	$t^2 s$	$\cos 3t$	0	1	1	10
3.	ts	e^t	-1	1	0,5	10
4.	ts	e^t	0,5	1,5	0,5	10
5.	$t^2 s^2$	$\frac{\sin t}{t}$	0,3	1,2	0,6	9
6.	e^{t-s}	1	0,1	0,9	0,5	8
7.	e^{t-s}	t	0,1	0,8	0,5	7
8.	$\cos \pi(t - s)$	1	0	1	0,5	10
9.	$\cos t \sin s$	1	0	2	0,25	10
10.	$\sin t \cos s$	1	-0,5	0,5	0,25	5
11.	$e^{2t} \cos s$	$\sin t$	0	0,5	0,6	5
12.	$e^{2t} \sin s$	$\cos t$	0	0,5	0,4	10
13.	$e^t \cos s$	$2 \sin t$	0	0,9	0,5	8
14.	$e^t \sin s$	$2 \cos t$	0	0,8	0,5	8
15.	$t \sin s$	e^t	0,2	0,8	0,4	6
16.	$t \cos s$	e^{-t}	0,1	0,9	0,3	8
17.	$t^2 e^s$	t	-2	-1	2	6

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

Основная:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 7-е изд. М.: Физматлит, 2012. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82563&sr=1
2. Башмаков Р.А., Махота А.А., Юлмухаметов Р.С. Мера и интеграл. Курс лекций /Изд-во БашГУ/- Уфа, 2012.-58с. <https://elib.bashedu.ru/dl/corp/BashmakovMera i IntegralKursLekcii.2012.pdf>
3. Гопенгауз И. Е. Высшая математика: Функциональный анализ: Учеб. Пособие. Изд. МИСиС. 2008 <https://e.lanbook.com/book/116486>
4. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев - СПб: Лань, 2009 - 270, [1] с. <https://e.lanbook.com/book/245>
5. Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. — Сборник задач по функциональному анализу. СПб: Лань, 2012 <https://e.lanbook.com/book/3175>

Дополнительная:

6. Башмаков Р.А., Аиткужина Н.Н., Махота А.А. Лабораторные работы по функциональному анализу. БашГУ, Уфа, 2017
https://elib.bashedu.ru/dl/local/Bashmakov_Aitkuzhina_Mahota_sost_Funkcionalnyj_analiz_mu_2017.pdf

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

А. Ресурсы «Интернет»

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elib.bashedu.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://www.biblioclub.ru
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети	http://e.lanbook.com

В. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.

2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Оборудование	Программное обеспечение
Аудитория № 501, № 530	Лекции	<p>№501: Учебная мебель, доска, персональный комп. и системный блок /Corei5-4460(3.2)/CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, ПрезентерLogitechWirelessPresenterR400 (210134000003592), проектор SonyVPL-DX270, экран ручной ViewScreenLotus 244x183 WLO-4304</p> <p>№530: Учебная мебель, доска</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.</p>
Аудитория № 517, №527	Лабораторные занятия	<p>№517: Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор.ДА32</p> <p>№527: Учебная мебель, доска</p>	<p>Ст1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.ндартные приложения Windows</p>
Аудитория № 517, №527	Групповые и индивидуальные консультации	<p>№517: Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор.ДА32</p> <p>№527: Учебная мебель, доска</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.</p>
Аудитория № 517, №527	учебная	<p>№517: Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от</p>

	аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации	смMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор.ДА32 №527: Учебная мебель, доска	17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.
Читальный зал №2 (физико-математический корпус)	Самостоятельная работа, выполнение РГР	Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 5 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.	1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины функциональный анализ на 5 семестр
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/360
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	73,7
лекций	36
практических/ семинарских	0
лабораторных	36
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,7
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	71,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	34,8

Форма(ы) контроля:

экзамен 5 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Введение: возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
2.	Системы множеств (полукольцо, кольцо)	1		1	4	1-3,6	(2), § 1, К.в. 1-2 №1-4, (7), II § 1	Проверка д/р, к/р, экз
3.	Теорема о кольце, порожденном полукольцом.	2		2	5,5	1,2,6	(2), § 1, К.в. 3-4 № 4-8	Проверка д/р, к/р, экз
4.	Системы множеств (алгебра, σ -кольцо, σ -алгебра, δ - алгебра. Борелевские множества на прямой.	2		2	8	1,2,6	(2), § 1 № 10-13	Проверка д/р, к/р, экз

5	Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное кольцо.	2		2	4	1,2,6	(2), § 2, К.в. 1-2, №1-3,8 (7), II, § 1	Проверка д/р, к/р, экз
6	σ -аддитивная мера и ее свойства.	2		2		1,2,6		Проверка д/р, к/р, экз
7	Определение внешней меры и ее свойства.	1		1	6	1,2,6	(2) § 2, №13-17	Проверка д/р, к/р, экз
8	Меры на прямой.	2		2	6	1,2,6	(2) § 2, №13-18	Проверка д/р, к/р, экз
9	Мера в R^n .	1		1	6	1,2,6	(4) V, § 1	Проверка д/р, к/р, экз
10	Свойства внешней меры на измеримых подмножествах.	1		1		1,2,6		Проверка д/р, к/р, экз
11	Непрерывность внешней меры на измеримых подмножествах.	2		2	6	1,2,6	(3) § 4, К.в.1	Проверка д/р, к/р, экз
12	Лебеговское продолжение меры	2		2		1,2,6		Проверка д/р, к/р, экз
13	Измеримые функции.	2		2	6	1,2,6	(2) §4, № 1-5	Проверка д/р, к/р, экз
14	Сходимости по мере и почти всюду.	1		1	4	1,2,6	(2) § 4, №6-8 К.в. 2-3	Проверка д/р, к/р, экз
15	Определение интеграла Лебега для простых функций.	2		2	6	1,2,6	(2) § 5, К.в. 1-2, № 1,2	Проверка д/р, к/р, экз

	Свойства.Определение интеграла Лебега.							
16	Класс суммируемых функций	1		1	6	1,2,6	(2), § 5, № 3-6 (4), VII	Проверка д/р, к/р, экз
17	Предельный переход под знаком интеграла Лебега	2		2	4	1,6	(2), § 5, № 5	Проверка д/р, к/р, экз
18	Связь интеграла Лебега с интегралом Римана	1		1		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
19	Интеграл Стильеса	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
20	Теорема Радона – Никодима	1		1		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
21	Прямое произведение мер и теорема Фубини	2		2		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
22	Пространства L_1, L_p ($p>1$)	2		2		1,6		Проверка д/р, к/р, экз
	Итого	36		36	71,5			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины функциональный анализ на 6 семестр
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/360
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	65,2
лекций	32
практических/ семинарских	0
лабораторных	32
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	71
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	43,8

Форма(ы) контроля:

экзамен 6 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	6 семестр							
1.	Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума;	2		2	6	1-6	(2) § 8, № 1-6, § 10, № 1-9	Проверка д/р, к/р, экз
2	Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа;	2		2	4	1-6	(2) § 11, К.в. 1-4, № 1-18	Проверка д/р, к/р, экз
3	Полнота и пополнение; теорема о	2		2	10	1-6	(2) § 13, К.В.1-3, № 1-4 § 16, № 1-9	Проверка д/р, к/р, экз, РГР

	стягивающих шаров; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.							
4	Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства;	1		1	6	1-6	(2) § 17, № 1-2, К.в. 1	Проверка д/р, к/р, экз
5	Сопряженное пространство, его полнота.	1		1	4	1-6	(2) § 16	Проверка д/р, к/р, экз
6	Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала	2		2	6	1-6	Самостоятельное изучение: Принцип равномерной ограниченности (8) гл.9, § 2	Проверка д/р, к/р, экз
7	Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах	1		1	4	1-6	(2) § 15, № 1-11	Проверка д/р, к/р, экз
8	Линейные операторы; норма оператора; сопряженный	2		2	6	1-6	(2) § 20,21	Проверка д/р, к/р, экз

	оператор; принцип равномерной ограниченности;							
9	Обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе.	1		1	4	1-6	(2) § 12, № 6-17	Проверка д/р, к/р, экз
10	Компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма – Лиувилля)	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
11	Гильбертовы пространства: скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
12	Неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз

	об изоморфизме, ортогональное дополнение							
13	Неравенства Гельдера и Минковского	1		1	10	1-6	Самостоятельное изучение унитарных операторов (7), гл. § 2	Проверка д/р, к/р, экз
14	Пространство $L_2(a,b)$	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
15	Общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы	2		2		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
16	Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию	2		2	5	1-6	(2) § 6 (11) гл.3, § 1.1 Функционалы Минковского - самостоятельно	Проверка д/р, к/р, экз
17	Спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз

18	Линейные топологические пространства и обобщенные функции: полинормированные пространства; функционал Минковского	2		2	2	1-6	(2), § 17	Проверка д/р, к/р, экз
19	Нормируемость и метризуемость;	1		1	4	1-6	(11), гл. III § 3.2 – 3.4	Проверка д/р, к/р, экз
20	Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.	1		1		1-6		Проверка д/р, к/р, экз
21	Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.	2		2		2,6		Проверка д/р, к/р, экз
	РГР							
	Итого	32		32	71			
	Всего часов:	68		68	142,5			

4.3 Рейтинг-план дисциплины функциональный анализ

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление 01.03.01 Математика
курс 3, семестр 5

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Теория меры. Интеграл Лебега				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	5
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
2. Выступление с докладом	3	1	0	3
Модуль 2. Метрические пространства				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	3
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
2. Выступление с докладом			0	3
Поощрительные баллы				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов			0	5
2. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)			0	5
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
1. Посещение лекционных занятий			0	-6
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			0	-10
Итоговый контроль				
2. Экзамен	15	2	0	30
Итого			0	110

Рейтинг-план дисциплины

функциональный анализ

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление 01.03.01 Математика

курс 3, семестр 6

Рейтинг-план №1 (экзамен)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Нормированные и гильбертовы пространства				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	5
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
3. Выступление с докладом	3	1	0	3
Модуль 2. Линейные функционалы и операторы в гильбертовых пространствах				
Текущий контроль			0	20
1. Аудиторная работа	1	15	0	15
2. Выполнение домашней работы			0	3
Рубежный контроль			0	15
1. Письменная контрольная работа	3	4	0	12
2. Выступление с докладом			0	3
Поощрительные баллы				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов			0	5
2. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)			0	5
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
3. Посещение лекционных занятий			0	-6
4. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			0	-10
Итоговый контроль				
2. Экзамен	15	2	0	30
Итого			0	110