

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
НАИМЕНОВАНИЕ ФИЛИАЛА  
НАИМЕНОВАНИЕ ФАКУЛЬТЕТА (ИНСТИТУТА)

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 6 от 26.01.2021 г.

Согласовано:  
Председатель УМК  
факультета математики и  
информационных технологий

Зав. кафедрой



/Х.К. Ийкин



/А.М. Ефимов

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Прикладной функциональный анализ

обязательная часть

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)

02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем»

Направленность (профиль) подготовки

«Системное и интернет-программирование»

Квалификация  
бакалавр

Разработчик (составитель)

К.ф.-м.н., доцент



/ Абузярова Н.Ф.

Для приема: 2021

Уфа - 2021.

## **Список документов и материалов**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы
2. Цели и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.  Тестирование, контрольные работы,  Экзамен, рейтинг-план
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения

ДИСЦИПЛИНЫ

6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

<b>Категория (группа) компетенций<sup>1</sup> (при наличии ОПК)</b>	<b>Формируемая компетенция</b>	<b>Код и наименование индикатора достижения компетенции</b>	<b>Результаты обучения по дисциплине</b>
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности и	ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ»
		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ» в профессиональной деятельности.
		ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Владеть навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе

			теоретических знаний по дисциплине «Прикладной функциональный анализ»
--	--	--	---

## **2. Цели и место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Прикладной функциональный анализ» относится к обязательной части.

Дисциплина изучается на 3 курсе в 5, 6 семестрах.

Цели изучения дисциплины: формирование математической культуры студентов; овладение современным аппаратом анализа для дальнейшего использования в других областях математики и дисциплинах естественно-научного цикла.

## **3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)**

Объем дисциплины «Прикладной функциональный анализ» составляет 7 ЗЕТ, или 252 академических часов, в том числе контактная работа с преподавателем 137,9 часов и самостоятельная работа студентов – 79,3 часа.

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## **4. Фонд оценочных средств по дисциплине**

**4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотношенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.**

Код и формулировка компетенции: ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности»

Для зачета:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения	
		«Не зачтено»	«Зачтено»
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ»	Фрагментарные представления об основных положениях дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Сформированные представления об основных положениях дисциплины «Прикладной функциональный анализ».
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ». в профессиональной деятельности.	Фрагментарные представления об основных методах дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Сформированное умение использовать основные методы дисциплины «Прикладной функциональный анализ».
ОПК-1.3. Имеет навыки выбора	Владеть навыками выбора методов решения задач	Фрагментарные представления об основных методах	Сформированные навыки использования основных методов дисциплины

методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	профессиональной деятельности на основе теоретических знаний по дисциплине «Прикладной функциональный анализ».	дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	«Прикладной функциональный анализ».
--	--	--	-------------------------------------

Для экзамена:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Неудовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ»	Фрагментарные представления об основных положениях дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Неполные представления об основных положениях дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных положениях дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Сформированные систематические представления об основных положениях дисциплины «Прикладной функциональный анализ».
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ». в профессиональной деятельности.	Фрагментарные представления об основных методах дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	В целом успешное, но не систематическое использование основных методов дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	В целом успешное, но содержащие отдельные пробелы использование основных методов дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Сформированное умение использовать основные методы дисциплины «Прикладной функциональный анализ».



ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Владеть навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний по дисциплине «Прикладной функциональный анализ».	Фрагментарные представления об основных методах дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	В целом успешное, но не систематическое применение навыков применения основных методов дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	В целом успешное, но содержащие отдельные пробелы применение навыков использования основных методов дисциплины «Прикладной функциональный анализ».	Полностью сформированные навыки использования основных методов дисциплины «Прикладной функциональный анализ».
--	--	--	---	--	---

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины.

В первом семестре – зачет по итогам текущего и рубежного контроля: текущий контроль – максимально 49 баллов, рубежный – 51 балл, поощрительные баллы – 10 баллов. Для получения зачета необходимо 60 или более баллов из 110 возможных..

Во втором семестре – экзамен – 30 баллов, текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10.

Шкалы оценивания:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций.**

**Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

<b>Код и наименование индикатора достижения компетенции</b>	<b>Результаты обучения по дисциплине</b>	<b>Оценочные средства</b>
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ».	Опросы на лаб. занятиях, тестирование, Экзамен
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать основные понятия и факты курса «Прикладной функциональный анализ» в профессиональной деятельности.	Контрольные работы, тестирование, экзамен
ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Владеть навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний по дисциплине «Прикладной функциональный анализ».	Контрольные работы, тестирование, РГР, экзамен

Рейтинг–план дисциплины представлен в приложении 2.

**Экзаменационные билеты**

Структура экзаменационного билета: билет содержит два вопроса из списка, приведенного ниже.

## Примерный перечень экзаменационных вопросов

### Прикладной функциональный анализ. Экзаменационные вопросы.

1. Метрические пространства (МП): определение, примеры ( $\mathbb{R}^n$ ,  $C[a;b]$ ,  $l^2$ ), непрерывные отображения, гомеоморфизм, изометрия.
2. Замыкание множества, замкнутые множества, сходимость в МП, теорема 31.
3. Замыкание множества, замкнутые множества, сходимость в МП, теорема 32.
4. Замыкание множества, замкнутые множества, сходимость в МП, теорема 33.
5. Плотные и всюду плотные множества в МП. Сепарабельные МП. Примеры сепарабельного и **несепарабельного(!)** МП.
6. Полнота МП. Доказательство полноты пространства  $l^2$ , неполнота  $C[a;b]$  с интегральной метрикой (док-во).
7. Пополнение. Теорема 35 о пополнении (без доказательства). Принцип вложенных шаров (теорема 34 с док-вом).
8. Принцип сжатых отображений в МП (теорема 36). Примеры применения.
9. Нормированные пространства, примеры с проверкой аксиом нормы.
10. Эвклидовы пространства (определение, примеры). Неравенство Коши-Буняковского в эвкл. пространстве. Норма в ЭП (проверка аксиом нормы).
11. Эвклидовы пространства (определение, примеры). Непрерывность линейных операций и скалярного произведения в ЭП относительно введенной нормы (после теоремы 37 и следствия).
12. Угол между векторами в ЭП. Ортогональность. Ортогональная, ортонормированная системы, базис. Линейная зависимость и независимость систем элементов. Лемма о линейной независимости ортогональной системы элементов, не содержащей нулевой элемент в ЭП.
13. Угол между векторами в ЭП. Ортогональность. Ортогональная, ортонормированная системы, базис. Ортогональная система в сепарабельном ЭП не более, чем счетна (лемма с док-вом).
14. Угол между векторами в ЭП. Ортогональность. Ортогональная, ортонормированная системы, базис. Теорема об ортогонализации (теорема 37).
15. Угол между векторами в ЭП. Ортогональность. Ортогональная, ортонормированная системы, базис. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном ЭП (следствие из теоремы 37 об ортогонализации).
16. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность замкнутости и полноты для ортонормированной системы в сепарабельном ЭП (теорема 38).
17. Эвклидовы пространства. Теорема Рисса-Фишера (теорема 39).
18. Компактные и вполне ограниченные множества в МП. Критерий компактности МП.
19. Относительная компактность множества в МП. Эквивалентность относительной компактности и вполне ограниченности для подмножества МП. Ограниченность компактного (и относительно компактного) множеств в МП. Недостаточность ограниченности множества для его вполне ограниченности в бесконечномерном МП (пример –  $l^2$ ).
20. Теорема Арцела (критерий компактности множества в  $C[a;b]$ ).

21. Гильбертово пространство. Пример. Ортогональное дополнение к множеству в ГП, лемма перед теоремой 40.
22. Гильбертово пространство. Теорема о разложении ГП в прямую сумму ортогональных подпространств (теорема 40 с док-вом, в том числе лемма в ней).
23. Гильбертово пространство. Теорема о разложении ГП в прямую сумму ортогональных подпространств (теорема 40 без док-ва, следствия 1-3 с док-вом).
24. Гильбертовы пространства. Теорема об изоморфизме для ГП (теорема 54).
25. Линейные, непрерывные, ограниченные функционалы в нормированном пространстве. Теорема 42.
26. Линейные непрерывные функционалы в нормированном пространстве. Два определения нормы функционала и их эквивалентность (лемма после теоремы 45).
27. Линейные непрерывные функционалы в нормированном пространстве. Теоремы 44 и 45.
28. Теорема 47 об общем виде линейного непрерывного функционала в ГП.
29. Линейные непрерывные и ограниченные операторы в норм. пр., норма оператора, теорема 48 и лемма.
30. Линейные непрерывные операторы в норм. пр. Сумма и произведение операторов.
31. Линейные непрерывные операторы в норм. пр. Обратный оператор. Теоремы 49-51.
32. Линейные непрерывные операторы в норм. пр. Обратный оператор. Теорема 52 и лемма.
33. Спектр оператора и резольвента. Теорема 55.
34. Сопряженный оператор, теорема 56.
35. Ограниченные множества в нормированном пространстве (НП). Компактные множества в НП. Леммы об ограниченности и замкнутости компакта.
36. Вполне ограниченные множества в НП. Лемма и теорема 57.
37. Слабая сходимости в ГП. Теорема 59.
38. Слабая сходимости в ГП. Теорема 60.
39. Слабая сходимости и слабая относительная компактность в ГП. Теорема 61.
40. Вполне непрерывные операторы в ГП. Ограниченность вполне непрерывного оператора.
41. Вполне непрерывные операторы в ГП. Теорема 62.
42. Самосопряженные операторы в ГП. Свойства спектра и собственных векторов.
43. Самосопряженные операторы в ГП. Теорема Гильберта-Шмидта (леммы с док-вом, теорема без док-ва).
44. Самосопряженные операторы в ГП. Теорема Гильберта-Шмидта (леммы без док-ва, теорема с док-вом).

Образец билета.

Башкирский государственный университет

Кафедра математического анализа

«Прикладной функциональный анализ»

2018-2019 учебный год

Экзаменационный билет N

1. Метрические пространства (МП): определение, примеры ( $\mathbb{R}^n$ ,  $C[a;b]$ ,  $l^2$ ), непрерывные отображения, гомеоморфизм, изометрия.
2. Спектр оператора и резольвента.

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Примерные критерии оценивания ответа на экзамене:

**Критерии оценки (в баллах):**

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов.

Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### **Промежуточный контроль**

В тестировании - оценка 2 балла за каждый правильный ответ, 0 баллов - неправильный ответ. Максимальная возможная оценка – 36 баллов

Устные опросы проводятся на занятиях по перечню экзаменационных вопросов, ответ оценивается по шкале «зачтено- 1 балл, «не зачтено»-0 баллов.

За каждое задание контрольной работы № 1 выставляется от 0 до 2,5 баллов (вся работа может иметь максимальную оценку 5 баллов). За каждое задание контрольной работы № 2 выставляется от 0 до 2,5 баллов (вся работа может иметь максимальную оценку 10 баллов). За каждое задание контрольной работы № 3 выставляется от 0 до 3 баллов (вся работа может иметь максимальную оценку 12 баллов). За каждое задание контрольной работы № 4 выставляется от 0 до 3 баллов (вся работа может иметь максимальную оценку 6 баллов). За каждое задание контрольной работы № 5 выставляется от 0 до 3 баллов (вся работа может иметь максимальную оценку 12 баллов). При этом 0 баллов – отсутствие решения или неправильное решение, максимальный балл за задание – полное правильное решение. Промежуточный балл, с шагом 1 (1,2,3) или с шагом 0,5 (0,5, 1, 1,5, 2) ставится за наличие неполного решения, а зависимости от недостатков и неточностей, индивидуально в каждом случае.

### **Тест по теме «Мера и интеграл Лебега»**

Вариант 1

- 1) Какое из перечисленных ниже множеств  $A \subset E$ , где  $E = [0; 1] \times [0; 1]$ , не является элементарным?  
 А)  $A = [0; 1/5] \times [0; 0]$ .  
 В)  $A = ((1/8; 1/2] \times [0; 1]) \cup ([0; 1] \times (2/3; 3/4))$ .  
 С)  $A = \{(x; y) \in E : |x| > 1/4, 0 \leq y \leq x\}$ .  
 D)  $A = \{(x; y) \in E : 0 < x \leq 1/3, y = 1/3\}$ .  
 E) Все множества А)-D) – элементарные.
- 2) Мера элементарного множества всегда  
 А) больше его площади; В) равна его площади; С) меньше суммы площадей составляющих его прямоугольников; D) равна квадрату его площади;  
 E) ответы А)-D) не верны.
- 3) Мера объединения двух элементарных множеств всегда  
 А) не меньше суммы мер каждого из них; В) не больше суммы мер каждого из них; С) равна сумме площадей составляющих их прямоугольников; D) больше максимальной из мер этих двух множеств; E) утверждения А)-D) не верны.
- 4) Верхняя мера может быть вычислена  
 А) только для элементарных множеств; В) только для прямоугольников;  
 С) не для всякого множества  $A \subset E$ ; D) только для счетных объединений элементарных множеств; E) утверждения А)-D) не верны.
- 5) Верхняя и нижняя меры измеримого множества  $A \subset E$   
 А) не всегда равны; В) верхняя мера не больше нижней меры; С) возможны оба варианта А), В); D) хотя бы одна из этих мер – меньше 1; E) ответы А)-D) не верны.
- 6) Множество  $A \subset E$  измеримо тогда и только тогда, когда  
 А) оно элементарно;  
 В)  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  элементарное множество  $B_\varepsilon : \mu^*(A \Delta B_\varepsilon) = \varepsilon$ ;  
 С)  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  элементарное множество  $B_\varepsilon : \mu^*(A \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$ ;  
 D)  $\exists \varepsilon > 0 : \forall$  элементарного множества  $B_\varepsilon : \mu^*(A \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$ ;  
 E) определения А)-D) не верны.
- 7) Множество  $A \subset E$  измеримо и  $\mu(A) = 2/3$ ,  $A_1 \subset A$  измеримо,  $\mu(A \setminus A_1) = 1/4$ . Найти  $\mu(E \setminus A_1)$ .  
 А)  $1/12$ ; В)  $1/6$ ; С)  $5/12$ ; D)  $7/12$ ; E)  $5/6$ .
- 8) Множества  $A, B \subset E$  измеримы,  $\mu(A) = 1/4$ ;  $\mu(B) = 1/2$ ,  $\mu(A \cap B) = 1/8$ . Найти  $\mu(A \Delta B)$ .  
 А)  $7/8$ ; В)  $5/8$ ; С)  $1$ ; D)  $3/8$ ; E)  $1/2$ .
- 9) Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset E$  – измеримое по Лебегу множество,  $A_c = \{x \in E : f(x) < c\}$ . Какое из приведенных утверждений не верно?  
 А) Если функция  $f$  измерима, то множество  $\{x \in A : |f(x)| < c\}$  измеримо  $\forall c \geq 0$ .  
 В) Если множество  $A_c$  измеримо  $\forall c \in \mathbb{R}$ , то  $f$  – измеримая функция.  
 С) Множество  $A_c \neq \emptyset \forall c \in \mathbb{R}$ .  
 D) Если среди множеств  $A_c$  имеется хотя бы одно не измеримое по Лебегу, то имеется бесконечно много значений  $c' \in \mathbb{R}$ , для которых множество  $A_{c'}$  не измеримо по Лебегу.  
 E) Все утверждения А)-D) верны.
- 10) Пусть  $f : [-2\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [|\sin x|]$ . Множество  $A_\pi = f^{-1}((-\infty; \pi/2))$  равно  
 А)  $\emptyset$ ; В)  $\mathbb{R}$ ; С)  $[-\pi; \pi]$ ; D)  $(-2\pi; 2\pi)$ ; E)  $[-2\pi; 2\pi]$ .

- 14) Пусть  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  определена формулой  $f(x) = -[2x]$ . Вычислить  $\int_{[0;1]} f d\mu$ .
- A) 1; B)  $-\frac{1}{2}$ ; C)  $\frac{1}{2}$ ; D) -1; E) функция  $f$  не интегрируема по Лебегу на  $[0; 1]$ .
- 15) Пусть  $f : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  определена формулой  $f(x) = [\cos x]$ . Вычислить  $\int_{[-\pi;\pi]} f d\mu$ .
- A)  $\pi$ ; B)  $-\pi$ ; C) 1; D) 0; E) -1.
- 16) Чему равен  $\int_{[-1;1]} \{x\} d\mu$ ?
- A) 2; B) 1; C) -2; D) 0; E) -1.
- 17) Чему равен  $\int_{[0;\pi]} \{\cos x\} d\mu$ ?
- A) -1; B)  $-\pi/2$ ; C) 0; D)  $\pi/2$ ; E) 1.
- 18) Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая функция, заданная на измеримом множестве  $A \subset E$ . Какое из утверждений не является верным?
- A) Если  $\exists \int_A |f(x)| d\mu$ , то  $\exists \int_A f(x) d\mu$ .
- B) Если  $\exists \int_A f(x) d\mu$ , то  $\exists \int_A |f(x)| d\mu$ .
- C) Если  $\int_A |f(x)| d\mu = 0$  то  $\int_A f(x) d\mu = 0$ .
- D) Если  $\int_A f(x) d\mu > 0$  то  $\int_A |f(x)| d\mu > 0$ .
- E) Все утверждения верны.

**Примерное задание для РГР.**



При каких  $\lambda$  применим принцип сжимающих отображений в пространствах  $L^2(a, b)$  и  $C[a, b]$  к уравнению Фредгольма 2-го рода

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s) ds + y(t) ?$$

Найти точное решение уравнения. Для нахождения приближенного решения составить программу. В программе предусмотреть:

- а) табулирование точного решения с шагом  $h = \frac{b-a}{2n}$  ;
- б) вычисление номера  $L$  итерации, обеспечивающей точность  $0,01$  в метрике  $C[a, b]$ , когда за первое приближение берется  $x_1(t) \equiv y(t)$ . Заметим, что  $L$  определяется из неравенства

$$\frac{\theta^{L-1}}{1-\theta} \cdot \rho(x_1, x_2) < 0,01 ,$$

где  $\theta$  — коэффициент сжатия;

- с) сравнение точного решения с приближенным, т.е. вычисление величины  $R = \max_{0 \leq k \leq 2n} |x(t_k) - \bar{x}(t_k)|$ , где  $x(t_k)$  — значения точного решения,  $\bar{x}(t_k)$  — значения приближенного решения.

Задания приведены в таблице № 2. В отчете показать совокупность значений  $\lambda$ , допускающих применение принципа сжатых отображений в пространствах  $L^2[a, b]$ ,  $C[a, b]$ , точное решение уравнения, значения чисел  $L$  и  $R$ , а также привести программу и заполненную таблицу № 1.

Таблица №1.

$k$	0	1	2	...	$2n$
$x(t_k)$					
$\bar{x}(t_k)$					

Таблица №2.

№№	$K(t, s)$	$y(t)$	$a$	$b$	$\lambda$	$n$
1.	$t^2 s$	$\cos 3t$	0	1	1	8
2.	$t^2 s$	$\cos 3t$	0	1	1	10
3.	$ts$	$e^t$	-1	1	0,5	10
4.	$ts$	$e^t$	0,5	1,5	0,5	10
5.	$t^2 s^2$	$\frac{\sin t}{t}$	0,3	1,2	0,6	9
6.	$e^{t-s}$	1	0,1	0,9	0,5	8
7.	$e^{t-s}$	$t$	0,1	0,8	0,5	7
8.	$\cos \pi(t - s)$	1	0	1	0,5	10
9.	$\cos t \sin s$	1	0	2	0,25	10
10.	$\sin t \cos s$	1	-0,5	0,5	0,25	5
11.	$e^{2t} \cos s$	$\sin t$	0	0,5	0,6	5
12.	$e^{2t} \sin s$	$\cos t$	0	0,5	0,4	10
13.	$e^t \cos s$	$2 \sin t$	0	0,9	0,5	8
14.	$e^t \sin s$	$2 \cos t$	0	0,8	0,5	8
15.	$t \sin s$	$e^t$	0,2	0,8	0,4	6
16.	$t \cos s$	$e^{-t}$	0,1	0,9	0,3	8
17.	$t^2 e^s$	$t$	-2	-1	2	6

## Контрольная работа №1

Вариант 1.

№1. Доказать:

a)  $\bigcup_{k=1}^m \overline{A_k} = \overline{\bigcap_{k=1}^m A_k}$ , где  $A_1, \dots, A_m \subset X$ ,  $X$  - базовое множество.

b)  $A \subset B \cup (A \Delta B)$

№2.  $E = [0, 1] \times [0, 1]$ ;  $A \subset E$ ,  $A$  - измеримо,  $\mu(A) = \frac{1}{2}$ ,  $A_1 \subset A$ ,  $(A \setminus A_1)$  - измеримо,  $\mu(A \setminus A_1) = \frac{1}{3}$ . Доказать, что  $A_1$  - измеримо, и найти  $\mu(A_1)$ ,  $\mu(E \setminus A_1)$ .

№3. Найти полную вариацию функции  $f(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$ , если  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ .

## Контрольная работа №2

1) Докажите, что

$$(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$$

2) Докажите, что функция  $f$  измерима на множестве  $X$ , если

$$X = [-1; 2], \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \leq x < 1 \\ \{x\}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

3) Проверить, является ли функция  $\rho$ , заданная на пространстве  $X^2$ , метрикой в  $X$ , если

a)  $X = l^2$

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{2k} - \eta_{2k})^2 \right)^{1/2}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots).$$

б)  $X = \mathbb{R}$   $\rho(x, y) = ||x| - |y||$ .

4) Является ли последовательность  $\{x^{(n)}\}$  фундаментальной? сходящейся в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ ? Ответ обосновать.

$$X = C[0; e], \quad x^{(n)}(t) = \ln \left( 1 + \frac{t}{n} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [0; e]} |x(t) - y(t)|.$$

## Контрольная работа №3

Вариант 1.

- №1. При каких  $\alpha \in \mathbb{R}$  отображение  $f : [0; \frac{1}{2}] \rightarrow [0; \frac{1}{2}]$ , задаваемое функцией  $f(x) = x^\alpha$ , сжимающее?
- №2. Проверить, определяет ли функция  $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| + \int_0^1 |x(t)| dt$  норму на  $C^{(1)}[0, 1]$ ?
- №3. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве  $C[0, 2]$  последовательность  $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$ . Найти предел, если сходится.
- №4. Является ли функционал  $F(x) = \int_0^1 t^3 x(t) dt$  линейным в  $C[0, 1]$ ?

## Контрольная работа №4

Вариант 1

- 1)  $X = C^{(1)}[0; 2]$ ,  
 $\|x\| = |x(0)| + \max_{t \in [0;2]} |x'(t)|$ .
- а) Проверить аксиомы нормы.  
б) Найти  $\|x\|$ , если  $x(t) = \sin t + \cos t$ .
- 2) а) Ортогонализировать, а затем нормировать систему элементов  
 $x^{(1)} = (1, 2, 0, \dots)$ ,  $x^{(2)} = (-1, 0, 0, \dots)$ ,  $x^{(3)} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

в гильбертовом пространстве  $X = l^2$  над  $\mathbb{R}$ .

б) В этом же гильбертовом пространстве найти ортогональное дополнение  $M^\perp$ , если

$$M = \{x = (0, 0, 0, \xi_4, \xi_5, \xi_6, 0, 0, \dots)\}, \quad \xi_4, \xi_5, \xi_6 \in \mathbb{R}.$$

## Контрольная работа №5

1)  $X = C[0; 1]$ ,

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

а) Проверить аксиомы нормы.

б) Найти  $\|x\|$ , если  $x = \ln(t + 1)$ .

2) а) Ортогонализировать, а затем нормировать систему элементов

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = \cos \pi t$$

в гильбертовом пространстве  $X = L^2(0; 2)$  над  $\mathbb{R}$ .

б) В этом же гильбертовом пространстве найти ортогональное дополнение  $M^\perp$ , если

$$M = \{x(t) : x(1+t) = x(1-t), \forall t \in (0; 1)\}.$$

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

#### Основная литература:

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2206>. — Загл. с экрана.
2. Функциональный анализ [Электронный ресурс]: лабораторные работы для студентов 3 курса факультета математики и информационных технологий / Башкирский государственный университет; сост. Р.А. Башмаков; Н.Н. Аиткужина; А.А. Махота. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2017. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:<https://elib.bashedu.ru/d>
3. [Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа \[Электронный ресурс\]: учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев - СПб: Лань, 2009 - 270, \[1\]](#)

**Дополнительная литература:**

4. Мера и интеграл [Электронный ресурс]: курс лекций / Р. А. Башмаков, А. А. Махота, Р. С. Юлмухаметов; БашГУ. — Уфа: Изд-е БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:<https://elib.bashedu.ru/dl/corp/BashmakovMeraIntegralKursLekcii.2012.pdf>>.

5 [Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. — Сборник задач по функциональному анализу. СПб: Лань, 2012](#)

**5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

А. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	<a href="https://elib.bashedu.ru/">https://elib.bashedu.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети	<a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>

В. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитория № 501 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 502 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 517 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное),</p> <p><b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитория № 517 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 523 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 526 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитория № 501 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 502 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 517 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 523 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 526 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитория № 501 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 502 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 517 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 523 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 526 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>помещения для самостоятельной работы:</b> читальный зал №2 (Физмат корпус - учебное)</p>		<p align="center"><b>Аудитория № 501</b> Учебная мебель, доска настенная меловая, персональный комп. и системный блок /Corei5-4460(3.2)/CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, Презентер LogitechWirelessPresenterR400 (210134000003592), проектор SonyVPL-DX270, экран ручной ViewScreenLotus 244x183 WLO-4304</p> <p align="center"><b>Аудитория № 502</b> Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Аудитория №517</b> Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cm MatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор. ДА32.</p> <p align="center"><b>Аудитория № 523</b> Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Аудитория №526</b> Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Аудитория № 528</b> Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Читальный зал №2</b> Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Прикладной функциональный анализ на 5,6 семестр

(наименование дисциплины)

\_\_ очная \_\_

форма обучения

Рабочую программу осуществляют:

Лекции: к.ф.-м.н., доцент Абузярова Н.Ф.

Практические занятия: к.ф.-м.н., доцент Абузярова Н.Ф.

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	7/252
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	137.9
Лекций	34
практических/ семинарских	34
Лабораторных	68
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1.9
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	79.3
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету (Контроль)	34.8

Форма(ы) контроля:

зачет \_\_ 5 \_\_ семестр

экзамен \_\_ 6 \_\_ семестр



№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Элементы теории множеств (повторение)	1		1	2	1,2,5	Задания выдаются преподавателем на каждом лабораторном Занятии	Опросы на занятиях, тестирование
2	Мера Лебега в $R^2$ : элементарные множества и их свойства, верхняя и нижняя меры множества, измеримые множества, критерий измеримости, (счетная) аддитивность и непрерывность меры Лебега.	2	3	3	3	1,2,5		
3	Обобщение на неограниченные множества, на $R^n$ . Понятие абстрактной меры.	1	1	0	2	1,2,5		
4	Измеримые функции и их свойства. Различные виды сходимости последовательности	2	2	4	2	1,2,5		

	измеримых функций, взаимосвязи между ними.							Задания выдаются преподавателем на каждом лабораторном занятии	
5	Интеграл Лебега от простой функции и его свойства, интеграл Лебега от произвольной измеримой функции.	2	2	4	4	1,2,5			
6	Предельный переход под знаком интеграла Лебега, связь между	1	1	2	3	1,2,5			

	интегралами Римана и Лебега.							
7	Метрические пространства: определение, примеры основных пространств и метрик в них. Сходимость последовательности. Замыкание, замкнутые и открытые множества. Непрерывные отображения м.п.	2	2	8	6	1,3,4,5		Опросы на занятиях, контрольные работы № 1, 2, РГР
8	Полнота и пополнение. Принцип вложенных шаров. Сепарабельность.	1	1	4	4	1,3,4,5		
9	Принцип сжатых отображений. Метод последовательных приближений.	1	1	2	4	1,3,4,5		
10	Компактность в метрических пространствах	2	2	4	4	1,3,4		
11	Нормированные пространства: определение, примеры, линейные непрерывные функционалы.	2	2	2	3	1,3,4,5	Задания выдаются преподавателем на каждом лабораторном	

	Теорема Хана-Банаха в н.п.						занятия	
12	Норма и ядро функционала, сопряженное пространство, коразмерность ядра линейного функционала.	1	1	2	2.3	1,3,4,5		
	6 семестр							
1	Эвклидовы пространства (определение, примеры). Неравенство Коши-Буняковского в эвкл. пространстве. Норма в ЭП. Непрерывность линейных операций и скалярного произведения в ЭП относительно введенной нормы. Угол между векторами в ЭП. Ортогональность. Ортогональная, ортонормированная системы, базис. Теорема об ортогонализации и ее следствия.	2	2	6	6	1,3,5	Задания выдаются преподавателем на каждом лабораторном занятии	Опросы на занятиях, контрольные работы № 3

2	Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность замкнутости и полноты для ортонормированной системы в сепарабельном ЭП. Теорема Рисса-Фишера.	2	2	6	6	1,3,5	Задания выдаются преподавателем на каждом лабораторном занятии	Опросы на занятиях, контрольная работа № 4
3	Гильбертово пространство. Теорема о разложении ГП в прямую сумму ортогональных подпространств. Теорема об изоморфизме ГП. Общий вид линейного непрерывного функционала в ГП.	2	2	4	6	1,3,5		
4	Линейные непрерывные операторы в банаховом пространстве: норма оператора, сумма и произведение, обратный оператор. Спектр и резольвента.	3	3	6	6	1,3,5	Задания выдаются преподавателем на каждом лабораторном занятии	

5	Вполне непрерывные операторы в нормированных и гильбертовых пространствах.	3	3	6	6	1,3,5		Опросы на занятиях, контрольная работа № 5
6	Сопряженный оператор. Самосопряженные операторы в ГП. Теорема Гильберта-Шмидта.	4	4	4	6	1,3,5		
	Экзамен							
	ИТОГО	34	34	68	79.3			

## Рейтинг – план дисциплины

Прикладной функциональный анализ

специальность «прикладная математика и информатика»

курс 3, семестры 5, 6 Количество часов по учебному плану 252.

Преподаватель: Абузярова Н.Ф., к.ф.-м.н. ., доцент.

Кафедра математического анализа

Семестр 1(5). Зачет.

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	баллы	
			минимальный	максимальный
Модуль 1 «Теория меры. Интеграл Лебега»				
Текущий контроль				
1. Аудиторная работа – опросы на занятиях	1	24	0	24
Рубежный контроль				
1. Тестирование	2	18	0	36
Модуль 2 «Метрические пространства»				
Текущий контроль				
1. Аудиторная работа – опросы на занятиях	1	25	0	25
Рубежный контроль				
1. Письменная контрольная работа №1	2,5	2	0	5
1. Письменная контрольная работа №2	2,5	4	0	10
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0

2. Посещение практических занятий			-10	0
Поощрительные баллы			0	10
Итоговый контроль				
1. Зачет				
ИТОГО			-16	110

Семестр 2(6). Экзамен.

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	баллы	
			минимальный	максимальный
Модуль 3 «Нормированные и гильбертовы пространства»				
Текущий контроль				
1. Аудиторная работа – опросы на занятиях	1	30	0	30
Рубежный контроль				
1. Письменная контрольная работа №3,4	3	6	0	18
Модуль 4 «Линейные функционалы и операторы в гильбертовых пространствах»				
Текущий контроль				20
1. Аудиторная работа – опросы на занятиях	1	10	0	10
Рубежный контроль				
1. Письменная контрольная работа №5	3	4	0	12
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0



2. Посещение практических занятий			-10	0
Поощрительные баллы			0	10
Итоговый контроль				30
1. Экзамен	15	2	0	30
ИТОГО				110

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_Ишкин Х.К.\_\_\_\_\_/

Преподаватель \_\_\_\_\_