

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Актуализировано:  
на заседании кафедры  
протокол № 5 от «25» января 2021 г.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета /института

Зав. кафедрой  / Хабибуллин Б.Н.

 / Ефимов А.М.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Геометрия и топология

обязательная часть

**программа бакалавриата**

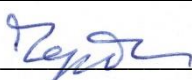
Направление подготовки (специальность)

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки

"Системное и интернет-программирование"

Квалификация  
бакалавр

Разработчик (составитель) <u>доц., к.ф.-м.н.</u> (должность, ученая степень, ученое звание)	 / <u>Черданцев И.Ю.</u> (подпись, Фамилия И.О.)
---	---

Для приема: 2021

Уфа 2021 г.

Составитель / составители: доц., к.ф.-м.н. Черданцев И.Ю.

Рабочая программа дисциплины актуализирована на заседании кафедры высшей алгебры и геометрии протокол от «25» января 2021 г. № 5

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры высшей алгебры и геометрии:

обновлен фонд оценочных средств.

протокол № 5 от «25» января 2021 г.

Заведующий кафедрой



/ Б.Н. Хабибуллин/

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций 4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы 5
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся) 5
4. Фонд оценочных средств по дисциплине 6
  - 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине. 6
  - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине. 7
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины 23
  - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины 23
  - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы 24
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине 24

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать фундаментальные понятия и теоремы геометрии и топологии.
		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь использовать математические знания для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.
		ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Владеть навыками выбора методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

## **2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Геометрия и топология» относится к *обязательной* части.

Дисциплина изучается на 1 и 2 курсе(ах) в 1, 2 и 3 семестре(ах).

Цели изучения дисциплины: получить знания о фундаментальных понятиях и теоремах геометрии и топологии; уметь применять математические знания для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии; овладеть навыками выбора методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения.

Знания, полученные в результате освоения курса «Геометрия и топология» необходимы при изучении некоторых разделов математического анализа, дифференциальных уравнений, классической и аналитической механики, методов оптимизации.

Дисциплина «Геометрия и топология» одна из базовых дисциплин, ибо без её знания невозможно адекватное понимание некоторых разделов математического анализа, дифференциальных уравнений, классической и аналитической механики, методов оптимизации.

## **3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)**

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

#### 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

##### 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Неудовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: фундаментальные понятия и теоремы геометрии и топологии.	Отсутствие знаний или фрагментарные представления о фундаментальных понятиях и теоремах геометрии и топологии.	Неполные представления о фундаментальных понятиях и теоремах геометрии и топологии.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о фундаментальных понятиях и теоремах геометрии и топологии.	Сформированные систематические представления о фундаментальных понятиях и теоремах геометрии и топологии.
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь: применять математические знания для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.	Отсутствие умений или фрагментарные умения в использовании математических знаний для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.	В целом успешное, но не систематическое использование математических знаний для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование математических знаний для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.	Сформированное умение использования математических знаний для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.
ОПК-1.3. Имеет	Владеть: навыками выбора	Отсутствие владения	В целом успешное, но	В целом успешное, но	Успешное и систематическое

навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	или фрагментарное владение навыками выбора методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	не систематическое применение навыков выбора методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	содержащее отдельные пробелы применения навыков выбора методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	о применении навыков выбора методов решения задач в области геометрии и топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
---	---	--	--	--	---

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),  
не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

#### **4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

<b>Код и наименование индикатора достижения компетенции</b>	<b>Результаты обучения по дисциплине</b>	<b>Оценочные средства</b>
ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: базовые понятия и теоремы геометрии и топологии.	Лабораторные работы, экзамен
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь: применять математические знания для решения задач вычислительного и теоретического характера в области геометрии и топологии.	Лабораторные работы, экзамен
ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач	Владеть: навыками выбора методов решения задач в области геометрии и	Лабораторные работы, экзамен

профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	топологии в профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	
--	---	--

Критериями оценивания при *модульно-рейтинговой системе* являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена*: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; *для зачета*: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

*для экзамена*:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

*для зачета*:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).



## Рейтинг – план дисциплины

Геометрия и топология

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

курс 1,2, семестр 1,2,3

Рейтинг-план №1 (1 семестр)

Виды учебной деятельности	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1.</b>				
Текущий контроль				<b>25</b>
1. Аудиторная работа	5	5	0	<b>25</b>
Рубежный контроль				
1. РГР	2	12	0	<b>24</b>
<b>Модуль 2.</b>				
Текущий контроль				<b>25</b>
1. Аудиторная работа	5	5	0	<b>25</b>
Рубежный контроль				
1. РГР	2	13	0	<b>26</b>
<b>Поощрительные баллы</b>				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов				<b>10</b>
2. Публикация статей				
3. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)				
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Зачет			<b>60</b>	<b>110</b>

Рейтинг-план №2 (1 семестр)

Виды учебной деятельности	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1.</b>				
Текущий контроль				<b>20</b>
1. Аудиторная работа	2	10	<b>0</b>	<b>20</b>
Рубежный контроль				
1. РГР	1	15	<b>0</b>	<b>15</b>
<b>Модуль 2.</b>				
Текущий контроль				<b>20</b>
1. Аудиторная работа	2	10	<b>0</b>	<b>20</b>
Рубежный контроль				
1. РГР	1	15	<b>0</b>	<b>15</b>
Поощрительные баллы				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов				<b>10</b>
2. Публикация статей				
3. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)				
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен			<b>0</b>	<b>30</b>

Рейтинг-план №3 (2 семестр)

Виды учебной деятельности	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1.</b>				
Текущий контроль			<b>0</b>	<b>20</b>
2. Отчёт по лабораторной работе №1	2	10	<b>0</b>	<b>20</b>
Рубежный контроль				
1. РГР	1	15	<b>0</b>	<b>15</b>
<b>Модуль 2.</b>				
Текущий контроль			<b>0</b>	<b>20</b>
2. Отчёт по лабораторной работе №2	2	10	<b>0</b>	<b>20</b>
Рубежный контроль				
1. РГР	1	15	<b>0</b>	<b>15</b>
Поощрительные баллы				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов				<b>10</b>
2. Публикация статей				
3. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)				
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
3. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
4. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен			<b>0</b>	<b>30</b>

Рейтинг-план №4 (3 семестр)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. «Теория кривых»</b>				
<b>Текущий контроль</b>			<b>0</b>	<b>18</b>
1. Аудиторная работа	2	9	<b>0</b>	<b>18</b>
<b>Рубежный контроль</b>			<b>0</b>	<b>14</b>
1. Зачетные лабораторные работы	1	14	<b>0</b>	<b>14</b>
<b>Модуль 2. «Теория поверхностей»</b>				
<b>Текущий контроль</b>			<b>0</b>	<b>22</b>
1. Аудиторная работа	2	11	<b>0</b>	<b>22</b>
<b>Рубежный контроль</b>			<b>0</b>	<b>16</b>
1. Зачетные лабораторные работы	2	8	<b>0</b>	<b>16</b>
<b>Поощрительные баллы</b>				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов			<b>10</b>	<b>10</b>
2. Публикация статей				
3. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)				
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен			<b>0</b>	<b>30</b>

## Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета: билет состоит из двух теоретических вопросов.

Вопросы для экзамена (1 семестр):

1. Векторы. Линейная зависимость и независимость векторов. Операции над векторами.
2. Скалярное произведение. Свойства.
3. Векторное произведение. Свойства. Векторное произведение в ортонормированном базисе.
4. Смешанное произведение. Свойства.
5. Преобразование координат.
6. Прямая на плоскости. Различные способы её задания.
7. Плоскость в пространстве. Различные способы её задания.
8. Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве.
9. Прямая в пространстве. Различные способы её задания. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
10. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
11. Полярная система координат на плоскости. Криволинейные координаты в пространстве.
12. Способы задания кривых. Понятие кривой.
13. Понятие поверхности. Способы задания поверхностей.
14. Поверхности вращения. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности.
15. Эллипс. Основные свойства.
16. Гипербола. Основные свойства. Асимптоты гиперболы. Сопряженные гиперболы.
17. Парабола. Основные свойства.
18. Эллипсоид. Свойства.
19. Гиперболоиды, основные свойства.
20. Параболоиды, основные свойства.
21. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
22. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Вопросы для экзамена (2 семестр):

1. Комплексные числа. Определение и операции.
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы.
3. Формула Муавра. Возведение в степень и извлечение корней из комплексных чисел.
4. Корни  $n$ -ой степени из 1. Первообразные корни.
5. Многочлены одной переменной: определение, операции. Операция сложение многочленов одной переменной и ее свойства.
6. Операция умножение многочленов одной переменной. Свойства.
7. Деление многочленов одной переменной.
8. Делители многочленов.
9. Наибольший общий делитель многочленов одной переменной. Способы его нахождения. Взаимно простые многочлены.
10. Алгоритм Евклида для многочленов одной переменной.
11. Теорема о линейном представлении многочлена.
12. Теоремы о взаимно простых многочленах.
13. Корни многочленов одной переменной.
14. Теорема Безу.
15. Схема Горнера.
16. Простые и кратные корни многочленов одной переменной.
17. Производная многочлена. Теорема о кратности корня.
18. Арифметическое пространство.
19. Порождающие системы и базисы.

20. Критерий базиса. Теорема о дополнении базиса.
21. Подпространства. Пересечения и суммы подпространств.
22. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения.
23. Теорема о линейной независимости прообразов. Изоморфизм линейных пространств.
24. Матрица линейного отображения. Преобразование матрицы при замене базисов.
25. Линейные операторы.
26. Операторы проектирования.
27. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен.
28. Корневые подпространства. Теоремы о сумме корневых подпространств линейного оператора.
29. Жорданов нормальный базис. Теорема Гамильтона-Кэли.
30. Билинейные формы. Квадратичные формы.
31. Матрица квадратичной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.
32. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа.
33. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Якоби.
34. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
35. Евклидовы пространства. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника.
36. Угол между векторами евклидова пространства. Ортонормированные базисы. Ортогонализация базисов по Граму-Шмидту.
37. Матрица Грама. Теорема о линейной зависимости.
38. Квадратичные формы в евклидовом пространстве.
39. Самосопряженные операторы в евклидовом пространстве. Теоремы о собственных числах и собственных векторах.
40. Ортогональный оператор. Матрица ортогонального оператора.

Вопросы для экзамена (3 семестр):

1. Необходимые сведения о вектор-функциях, основная лемма.
2. Определение кривой, простые, регулярные кривые, касательный вектор. Эквивалентные кривые, натуральный параметр. Теорема о натуральной параметризации кривой.
3. Кривизна кривой, радиус кривизны. Кривые общего типа, вектор главной нормали кривой.
4. Базис Френе кривой, формулы Френе.
5. Плоские кривые. Критерий плоскости кривой.
6. Формулы Френе для кривых с произвольным параметром.
7. Формулы для кривизны, кручения и базиса Френе для кривых с произвольным параметром (лемма и теорема).
8. Строение кривой вблизи некоторой ее точки; соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости.
9. Теорема существования и единственности кривых. Натуральное уравнение кривой.
10. Предварительные понятия о вектор-функциях от двух переменных. Параметризация, элементарная поверхность, кривые на поверхности, диффеоморфизм. Эквивалентные параметризации.
11. Примеры поверхностей: цилиндр, поверхности вращения, линейчатые поверхности и их частные случаи (конус, цилиндрическая поверхность, поверхность касательных, нормалей и бинормалей).
12. Касательная плоскость и касательное пространство. Теорема о касательных векторах поверхности.
13. Теорема о корректности определения касательного пространства.
14. Первая квадратичная форма поверхности. Ее применения.
15. Отображения поверхностей, дифференциал отображения поверхностей, диффеоморфизмы поверхностей, теорема о диффеоморфизмах.

16. Изометрии евклидовых пространств. Изометрии поверхностей. Теорема 1 (о совпадении I квадратичных форм при изометриях), теорема 2 (о соответствующих кривых при изометриях).
17. Примеры вычисления первой квадратичной формы (плоскость, цилиндр, поверхность вращения, катеноид, геликоид, линейчатые поверхности).
18. Вектор нормали к поверхности, нормальные сечения, относительная кривизна нормального сечения, функция нормальной кривизны поверхности.
19. Вторая квадратичная форма, вычисление функции нормальной кривизны через первую и вторую квадратичные формы.
20. Индикатриса Дюпена.
21. Главные кривизны и главные направления поверхности. Полная и средняя кривизна поверхности. Нахождение главных кривизн и главных направлений поверхности.
22. Леммы из курса алгебры (Л1-Л4).
23. Лемма о приведении первой и второй квадратичных форм, формула Эйлера.
24. Деривационные уравнения поверхностей. Теорема (формулы для символов Кристоффеля). Деривационные уравнения Гаусса и Вейнгартена.
25. Геодезическая и нормальная кривизны кривой на поверхности. Геодезические линии и их экстремальное свойство.

Образец экзаменационного билета:

**ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»  
Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра высшей алгебры и геометрии**

Направление подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем

дисциплина: «**Геометрия и топология**»,  
3 семестр

**Экзаменационный билет №1**

1. Необходимые сведения о вектор-функциях, основная лемма.
2. Касательная плоскость и касательное пространство. Теорема о касательных векторах поверхности.

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ Б.Н. Хабибуллин

Перевод оценки из 100-балльной в пятибалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

**Критерии оценки (в баллах):**

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы;

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности;

- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос;

- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### Задания для лабораторной работы

#### Описание лабораторной работы.

В течение первого семестра обучающиеся выполняют расчетно-графическую работу, во втором семестре выполняют расчетно-графическую работу и две лабораторные работы, в третьем семестре выполняют три лабораторные работы и сдают отчеты. Каждая лабораторная работа состоит из объемных заданий.

#### Пример варианта лабораторной работы:

Лабораторная работа №1.

Найти: 1) базис Френе, 2) кривизну и кручение кривой, 3) соприкасающуюся плоскость, 4) нормальную плоскость, 5) спрямляющую плоскость, 6) касательную и нормаль, 7) бинормаль для кривой:

1.  $x = 3t^2, y = 3t + t^3, z = 3t - t^3$ ;
2.  $x = \ln t, y = t^2, z = 2t$ .

#### Описание методики оценивания:

##### Критерии оценки (в баллах):

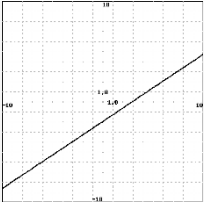
Во втором семестре за каждый, правильно решенный пункт каждой лабораторной работы, студенту выставляется 2 балла. Максимальный балл за лабораторную работу 20. Всего за лабораторные работы во втором семестре максимальный балл 40.

В третьем семестре за каждый правильно решенный пункт в первой лабораторной работе выставляется студенту 1 балл, за каждый правильно решенный пункт во второй и третьей лабораторной работе выставляется студенту 2 балла. Максимальный балл за первую лабораторную работу 14, за вторую и третью 8. Всего максимальное число баллов за лабораторные работы 30.

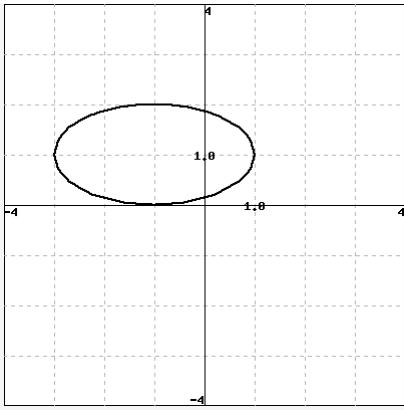
#### Пример варианта расчетно-графической работы.

1. Уравнение  $y=mx+b$  задаёт прямую линию, показанную на рисунке.

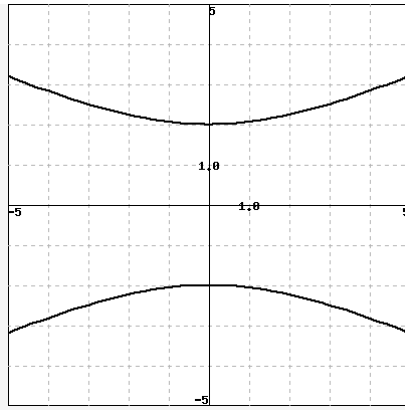




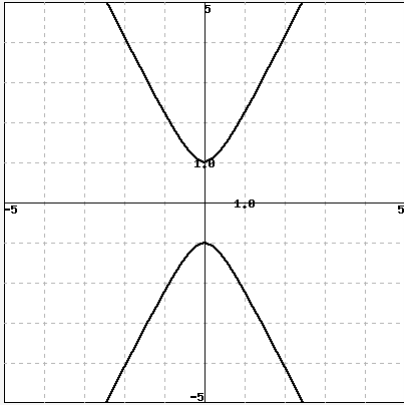
2. Найдите вектор, начинающийся в точке  $(-5, -2, 6)$  и заканчивающийся в точке  $(7, 5, -8)$ . Рассмотрите прямую, соединяющую две приведённые выше точки. Для каждого из перечисленных ниже уравнений определить, задаёт уравнение эту прямую или нет.
  - 1)  $(x, y, z) = (-5, -2, 6) + t(-12, -7, +14)$ ,
  - 2)  $(x, y, z) = (-5, -2, 6) + t(7, 5, -8)$ ,
  - 3)  $(x, y, z) = (7, 5, -8) + t(-5, -2, 6)$ ,
  - 4)  $(x, y, z) = (-5, -2, 6) + t(12, 7, -14)$ ,
  - 5)  $(x, y, z) = (7, 5, -8) + t(12, 7, -14)$ .
3. Даны два вектора  $u = \langle 8, -1, -3 \rangle$  и  $v = \langle 7, 7, -3 \rangle$ . Вычислите длины векторов и их скалярное произведение.
4. Найдите уравнение плоскости, которая параллельна плоскости  $-6x + 5y - 9z = -4$  и проходит через точку  $(-4, -5, 0)$ .
5. Найдите уравнение плоскости, которая перпендикулярна прямой  $(x, y, z) = (10, 3, -10) + t(3, 4, -10)$  и проходит через точку  $(3, -10, 10)$ .
6. Даны три точки  $(-4, 5, -8)$ ,  $(-1, 9, -12)$ ,  $(-1, 10, -10)$ , через которые проведена плоскость. Найдите вектор нормали к этой плоскости.
7. Вычислите векторное произведение  $[a, b]$ , если  $a = (3, -3, -2)$  и  $b = (-4, -5, -3)$ . Вычислите векторное произведение  $[c, d]$ ,  $c = 1e_1 + 4e_2 + 1e_3$  и  $d = -4e_1 + 5e_2 - 5e_3$ .
8. Найдите объем косоугольного параллелепипеда с ребрами PQ, PR, PS, если  $P(5, -4, 3)$ ,  $Q(7, -1, 6)$ ,  $R(4, -5, 2)$ ,  $S(11, -6, 5)$ .
9. Гаечный ключ длиной 0.3 метров направлен вдоль положительной оси ординат и приложен к болту в начале координат. К концу ключа приложена сила, направленная вдоль вектора  $(0, 3, 5)$ . Найти величину силы в ньютонах, необходимую для приложения к болту крутящего момента величиной 100 ньютонов на метр.
10. Найдите векторно-параметрическое уравнение и координатно-параметрические уравнения прямой линии, проходящей через точку  $P(-1, -4, -1)$  и перпендикулярной плоскости  $-2x - 1y + 1z = 0$ .
11. Найдите векторно-параметрическое уравнение и координатно-параметрические уравнения прямой линии, проходящей через точки  $P(4, -3, -5)$  и  $Q(1, -5, -10)$ .
12. Найдите векторно-параметрическое уравнение прямой линии, получающейся в пересечении двух плоскостей  $2x - 4y + z = -3$  и  $2x + 5z = 1$ .
13. Прямая задана координатно-параметрическими уравнениями  $x = 1 + 7t$ ,  $y = 2 + 2t$ ,  $z = 3 + 7t$ . Вторая прямая параллельна первой и проходит через точку  $P(-3, -1, -2)$ . Найдите точки пересечения второй прямой с координатными плоскостями.
14. Запишите общее уравнение плоскости, в котором коэффициент при переменной  $x$  равен  $-12$ , если известно, что плоскость проходит через три точки  $(4, 5, -3)$ ,  $(9, 1, 1)$ ,  $(9, 2, 3)$ .
15. Найдите точку пересечения прямой линии  $(0, 1, 0) + t(2, 3, -2)$  и плоскости  $3x + 4y + 3z = 100$ .
16. Найдите косинус двугранного угла, образованного плоскостями  $-1x + 2y - 2z = 0$  и  $1x + 1y - 3z = -4$ .
17. Найдите расстояние от точки  $(-5, 1, 0)$  до плоскости  $4x + 1y - 5z = 2$ .
18. Вещественная ось гиперболы вертикальна и имеет длину 4, асимптоты гиперболы задаются уравнениями  $y = 89x + 1$  и  $y = -89x + 1$ . Найдите центр гиперболы, расстояние между её фокусами и её эксцентриситет.
19. Для каждого графика составьте соответствующее ему уравнение:



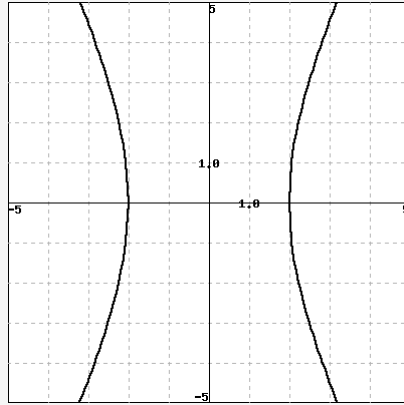
1.



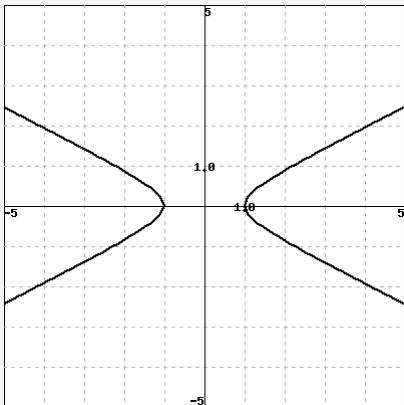
2.



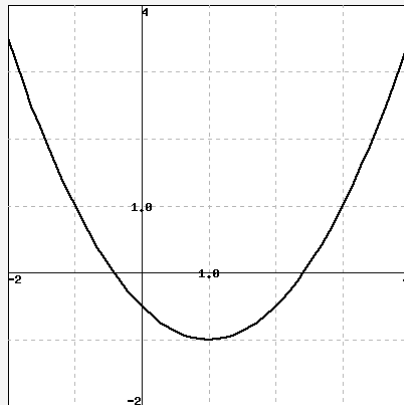
3.



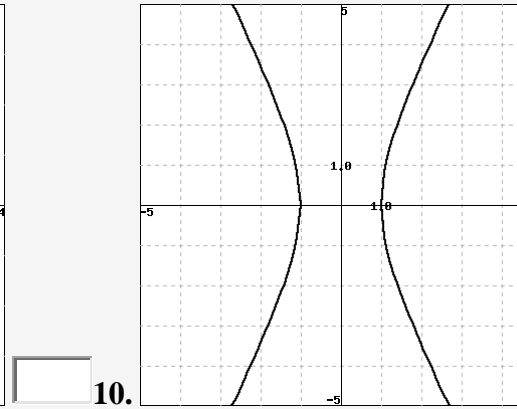
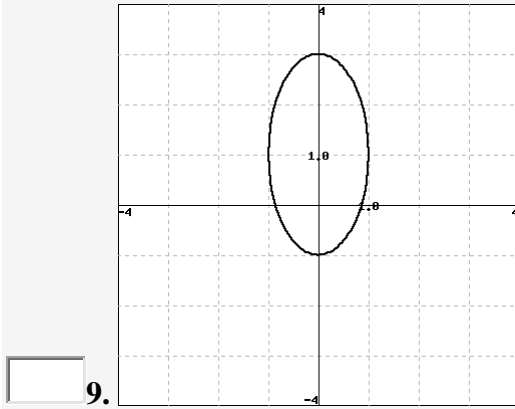
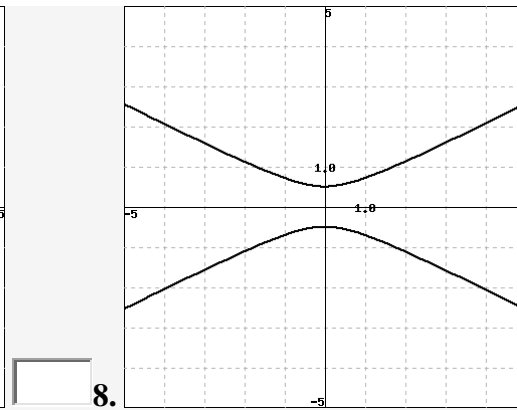
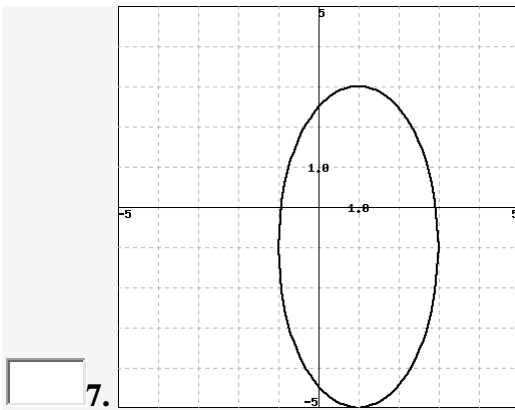
4.



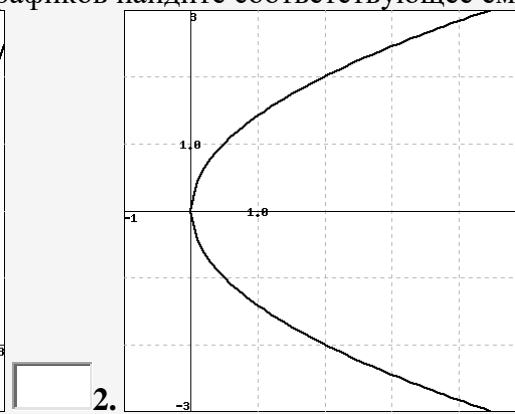
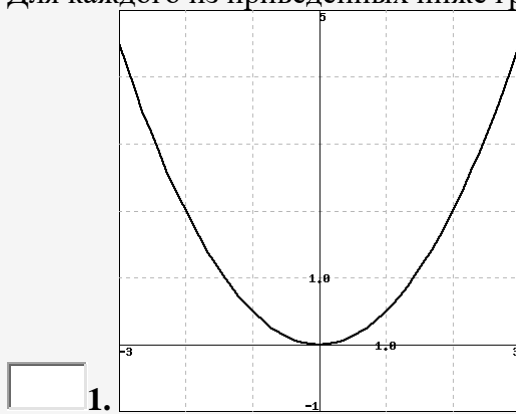
5.

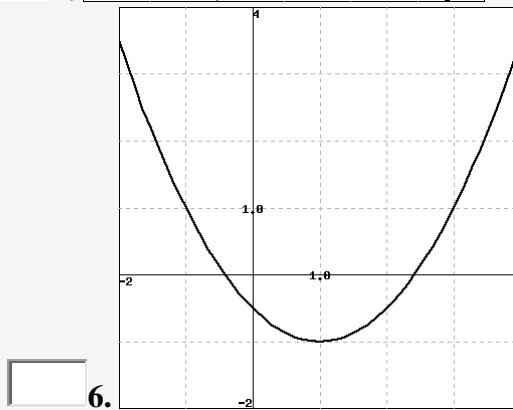
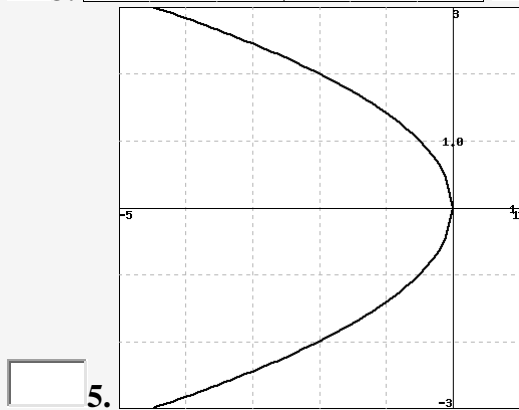
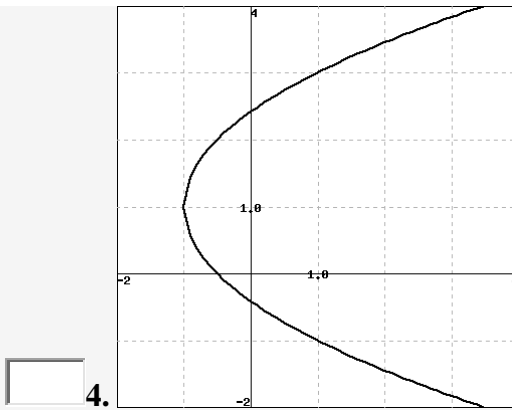
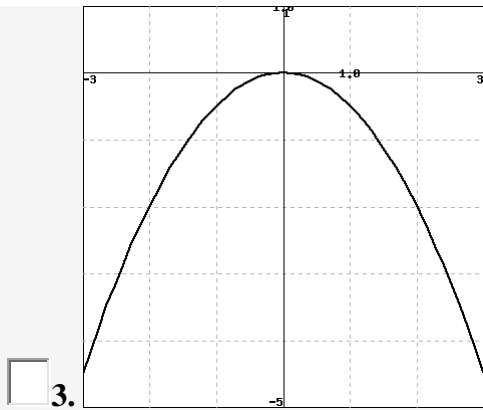


6.



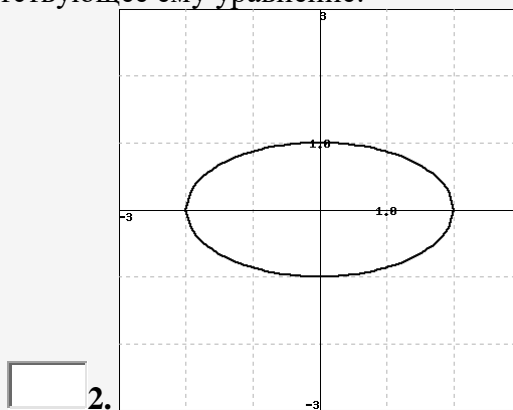
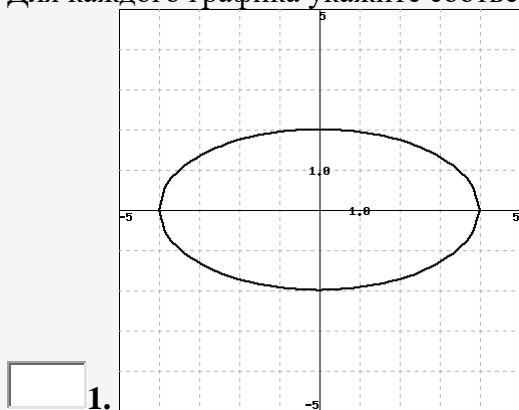
20. Для каждого из приведённых ниже графиков найдите соответствующее ему уравнение:

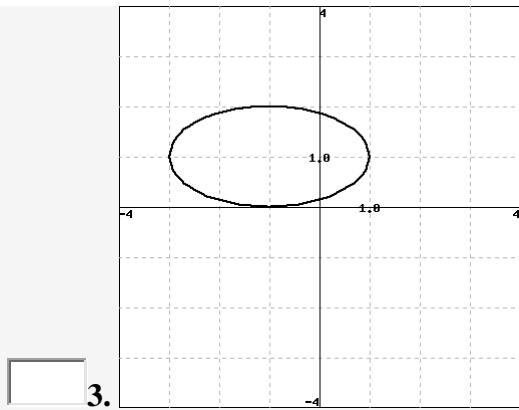




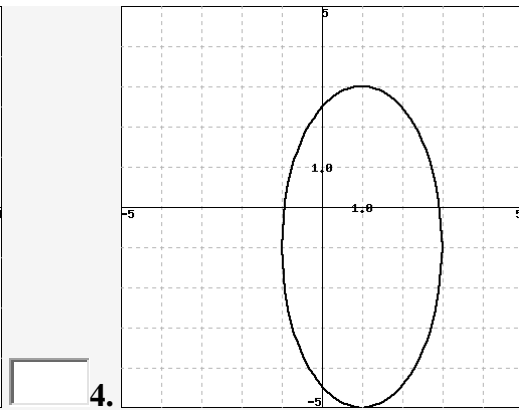
21. Найдите вершину, фокус и директрису для парабол, заданных следующими уравнениями:  
 $(y - 7)^2 = 20(x - 5)$ ,  $x^2 + 40x = 4y - 28$ .

22. Для каждого графика укажите соответствующее ему уравнение:

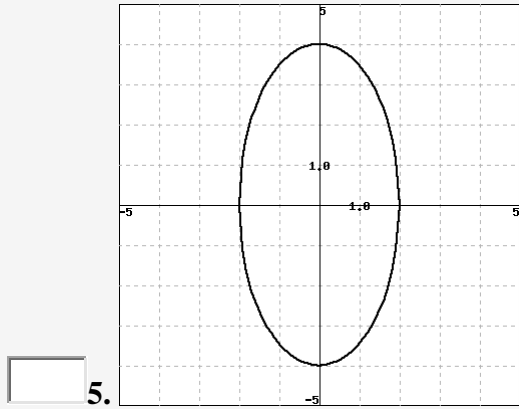




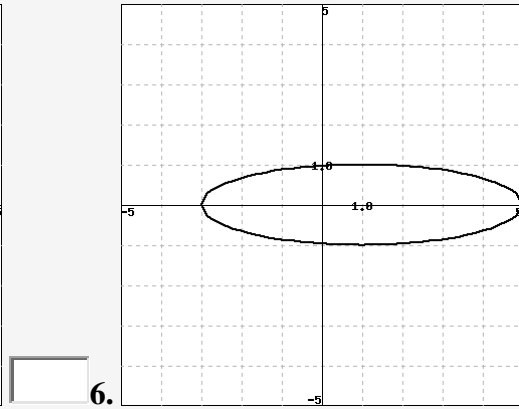
3.



4.



5.

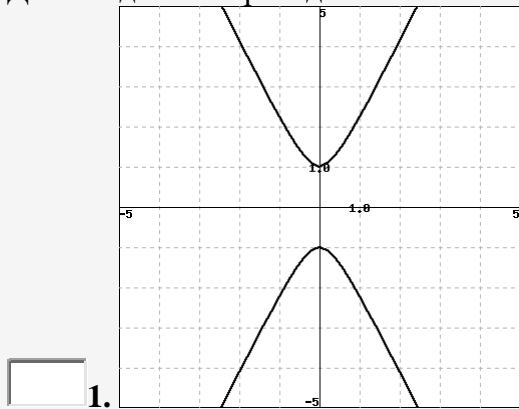


6.

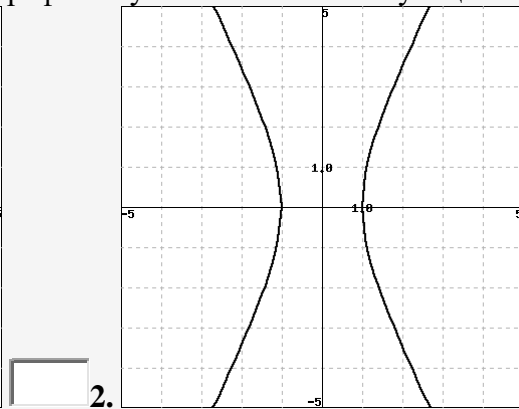
23. Найдите центр, вершины и фокусы каждого из приведённых эллипсов:  $\frac{(x+8)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{64} = 1$ ,

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

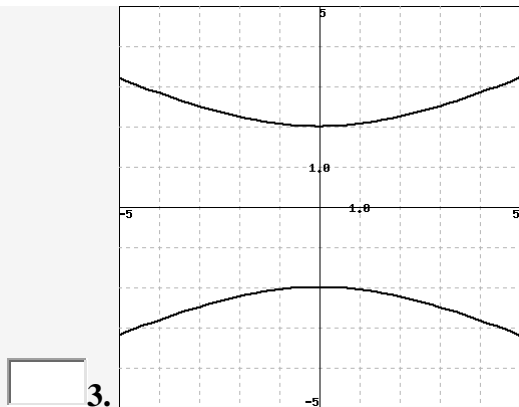
24. Для каждого из приведенных ниже графиков укажите соответствующее ему уравнение.



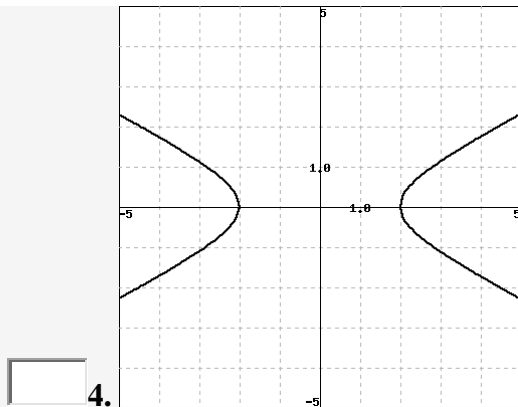
1.



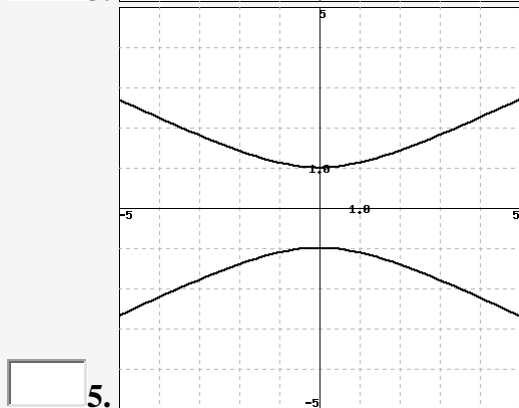
2.



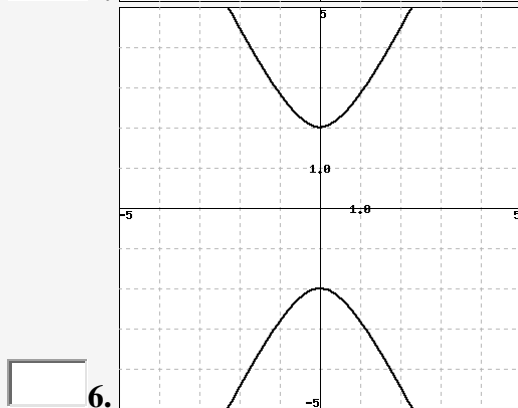
3.



4.



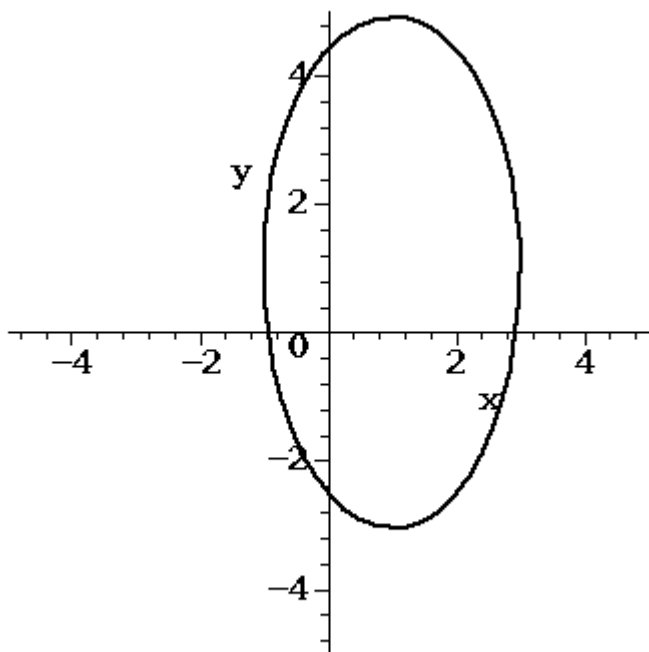
5.



6.

25. Укажите, какое из перечисленных уравнений задает прямую линию, окружность, эллипс, не являющийся окружностью, параболу, гиперболу: 1)  $x^2 + y^2 = 4x + 6y + 9$ ,  $y^2 + (x + 1)^2 - 2x^2 = 100$ ,  $(x + 1)^2 - x^2 - y = 0$ ,  $y^2 - (y + 1)^2 + x^2 = 0$ ,  $x^2 + (2y - 1)^2 = 20$ .

26. На рисунке изображен эллипс:



Найти его центр, большую и малую ось. Написать его каноническое уравнение.

27. Определите тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$x^2 + 6z^2 = 36,$$

и найдите точки пересечения данной поверхности с координатными прямыми  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Изобразите заданную поверхность на чертеже.

28. Определите тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 = -16,$$

и найдите точки пересечения данной поверхности с координатными прямыми  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Изобразите заданную поверхность на чертеже.

29. Определите тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$6x^2 + 2y^2 + z = 12,$$

и найдите точки пересечения данной поверхности с координатными прямыми  $x$ ,  $y$ , и  $z$ . Изобразите заданную поверхность на чертеже.

30. Приведите уравнение  $4x^2 - 49y^2 + z^2 + 10x - 14y = -74$ , к каноническому виду.

Описание методики оценивания.

#### **Критерии оценки (в баллах):**

За каждую правильно решенную задачу, студенту выставляется 1 балл. Максимальный балл за расчетно-графическую работу 30.

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература:**

1. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Физматлит, 2006. [Электронный ресурс]: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82795>
2. И.В. Проскуряков Сборник задач по линейной алгебре. Санкт-Петербург : Лань, 2010. [Электронный ресурс] : <https://e.lanbook.com/book/114701>.
3. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва : Физматлит, 2009. [Электронный ресурс]: <https://e.lanbook.com/book/2109>.
4. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре: учебное пособие. Санкт-Петербург : Лань, 2019. [Электронный ресурс]: <https://e.lanbook.com/book/115199>.
5. Паньженский В.И. Введение в дифференциальную геометрию. Санкт-Петербург: Лань, 2015. [Электронный ресурс]: <https://e.lanbook.com/book/67459>.
6. Шаров Г.С., Шелехов А.М., Шестакова М.А. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Москва: МЦНМО, 2005. [Электронный ресурс]: <https://e.lanbook.com/book/9440>

#### **Дополнительная литература:**

7. Постников, М.М. Линейная алгебра. Санкт-Петербург: Лань, 2009. [Электронный ресурс]: <https://e.lanbook.com/book/319>.
8. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. Санкт-Петербург : Лань, 2008. [Электронный ресурс]: <https://e.lanbook.com/book/399>.

## 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

1. Электронная библиотечная система «ЭБ БашГУ»- <https://elib.bashedu.ru/>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>

## 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 530 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитория № 511 (Физмат корпус - учебное), № 526 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 527 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитория № 511 (Физмат корпус - учебное), № 526 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 527 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 530 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитория № 511 (Физмат корпус - учебное), № 526 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 527 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 528 (Физмат корпус - учебное), аудитория № 530 (Физмат корпус - учебное)</p> <p><b>5. помещения для самостоятельной работы:</b>                      читальный зал №2 (Физмат корпус - учебное)</p>	<p><b>Аудитория №511</b>                      Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа проектор Mitsubishi EX 320U 3D 2.4кг., экран на штативе DraperDiplomat (1:1) 84/84* 213*213 MW, компьютер в составе: системный блок DEPO 460MD/3-540/T500G/DVD-RW, монитор 20".</p> <p><b>Аудитория №526</b>                      Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p><b>Аудитория №527</b>                      Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p><b>Аудитория №528</b>                      Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p><b>Аудитория №530</b>                      Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p><b>Читальный зал №2</b>                      Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.</p>



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины *Геометрия и топология* на 1-3 семестр  
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	12/432
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	176,6
лекций	86
практических/ семинарских	52
лабораторных	34
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	4,6
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	115
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	140,4

Форма(ы) контроля:

экзамен 1,2,3 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 семестр							
1	Векторные пространства, базис и размерность пространства. Подпространства, их суммы и пересечения. Размерность суммы подпространств. Прямые суммы подпространств. Преобразование базиса и координат вектора.	6	6		12	[3]	[1] §1, 5-10	проверка домашних работ, экзамен
2	Векторная алгебра. Равенство направленных отрезков. Сложение векторов. Отношение отрезков. Координаты на прямой, плоскости и в пространстве. Аффинная система координат, репер. Прямоугольная система координат. Расстояние между точками. Скалярное произведение векторов. Ортонормированные базисы и реперы.	6	6		12	[3]	[1] §1, 25-36	проверка домашних работ, экзамен
3	Векторное и смешанное произведение векторов. Преобразование аффинных координат вектора и точки. Преобразование прямоугольных координат вектора и точки.	10	10		14	[3]	[1] §2,6-10 §3, 7-11	проверка домашних работ, РГР, экзамен
4	Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Параметрические уравнения прямой и плоскости. Плоскость и уравнение первой степени от трех переменных. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости. Расстояния от точки до прямой, от точки до плоскости, от прямой до прямой. Угол между прямыми, плоскостями, прямыми и плоскостями.	8	8		12	[3]	[1] §1, 1-3	проверка домашних работ, экзамен
5	Эллипс, парабола, гипербола. Канонические уравнения эллипса, параболы, гиперболы. Приведение многочлена второго порядка от двух	6	6		12,5	[3]	[1] §4,4-9	проверка домашних работ, экзамен

	переменных к каноническому виду. Виды линий второго порядка. Теоремы единственности для линий второго порядка.							
6	Цилиндрические и конические поверхности. Эллипсоиды. Гиперболоиды. Параболоиды. Прямолинейные образующие поверхностей.					[3]	[1] §5,4-9	
	<b>всего часов (1 семестр):</b>	36	36		62,5			
	2- й семестр							
1	Комплексные числа и операции над ними. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Возведение в степень, формула Муавра и извлечение корней.	3	2		3	[4]	[8]: 101-107, 112, 113, 119-122, 143, 145, 175	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен
2	Многочлены от одной переменной. Алгоритм деления с остатком. Теорема Безу, схема Горнера. НОД и НОК в кольце многочленов. Неприводимые многочлены. Разложение многочленов на неприводимые множители над полем вещественных и комплексных чисел.	3	2	2	3	[4]	[8]: 546, 549, 550, 555, 577 а)-d), 578 а)-d), 587	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен
3	Линейные отображения векторных пространств. Матрицы линейных отображений. Размерность ядра и образа. Линейные функционалы, пространство линейных функционалов.	3	2	2	3	[4], [7]	[2]: 1434-1437, 1441-1446;	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен
4	Линейные операторы. Алгебра операторов. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Определитель и след линейного оператора. Инвариантные подпространства. Собственные векторы. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Критерий диагонализруемости. Существование инвариантных подпространств.	5	2	2	3	[4], [7]	[2]: 1451-1454, 1457,1458, 1465-1468, 1472-1474, 1479-1482;	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен
5	Корневые подпространства, их размерность. Разложение в прямую сумму корневых подпространств. Нильпотентный оператор, циклические подпространства, разложение в прямую сумму циклических подпространств	6	2	2	4	[4], [7]	[2]: 1509-1512, 1530-1535;	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен

	нильпотентного оператора. Приведение матрицы линейного оператора над полем комплексных чисел к жордановой форме.							
6	Билинейные формы, их матрицы, преобразование матрицы билинейной формы. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному видам методом Лагранжа и методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определенности. Закон инерции.	5	2	2	3	[3], [4]	[2]: 1175-1178, 1180-1184, 1187-1189, 1212-1216;	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен
7	Евклидовы пространства, основные метрические понятия. Процесс ортогонализации. Изоморфизмы евклидовых векторных пространств. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора. Расстояние от точки до подпространства.	4	2	2	3	[3], [4]	[2]: 1357-1363, 1370-1372, 1374	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, РГР, экзамен
8	Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор данному. Самосопряженные операторы и их свойства.	3	2	2	3,5	[3], [4]	[2]: 1541-1543, 1555-1558, 1571-1573, 1585-1587	отчет по лабораторной работе, проверка домашних работ, экзамен
	<b>всего часов (2 семестр):</b>	32	16	16	25,5			
	3-й семестр							
1	<u>Кривые в трёхмерном евклидовом пространстве.</u> Кривые. Способы задания кривых. Регулярные и особые точки кривой. Функция длины дуги, натуральный параметр кривой. Репер Френе. Динамика репера Френе. Кривизна и кручение кривой. Центр и радиус кривизны. Вычисление кривизны, кручения и репера кривых, заданных произвольным параметром. Эволюта и эвольвента кривой. Кривые как траектории	8		8	12	[5]	[6], Гл.1 §1, №2 (1)-(4); §3, №2 (1)-(4); §4, №1 (1)-(4); §6, №2; §7, №1 (1)-(5).	Проверка домашних заданий, опрос теоретического материала, отчет по лабораторной работе

	материальных точек в механике. Теорема существования и единственности кривой.							
2	<p><u>Геометрия поверхностей.</u>          Параметрическое задание поверхности.          Криволинейные координаты на поверхности.          Замена криволинейных координат на поверхности.          Касательная плоскость и касательное пространство поверхности. Первая квадратичная форма поверхности и её применения.          Нормальный вектор поверхности, нормальные сечения поверхности. Функция нормальной кривизны поверхности, вторая квадратичная форма поверхности. Индикатриса Дюпена.          Характеризация точек поверхности, главные кривизны, Гауссова и средняя кривизна поверхности. Вычисление главных кривизн.          Деривационные формулы Вайнгартена.          Вычисление символов Кристоффеля через коэффициенты первой квадратичной формы.          Геодезическая и нормальная кривизны кривой на поверхности. Геодезические линии и их экстремальное свойство.</p>	10		10	15	[5]	[6], Гл.1 §8, (1)-(4); §10, (1)-(5); §11, №1 (1)-(4); §12, (1)-(4).	Проверка домашних заданий, опрос теоретического материала, отчет по лабораторной работе
	<b>всего часов (3 семестр):</b>	18		18	27			
	<b>Всего часов:</b>	86	52	34	115			

