

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:
на заседании кафедры
протокол № 6 от 26.01.2021 г.

Согласовано:
Председатель УМК
факультета математики и
информационных технологий

Зав. кафедрой



/ X.K. Ишкин



/ A.M. Ефимов

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Дисциплина Дополнительные главы функционального анализа
(наименование дисциплины)

Дисциплины по выбору

(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))

Программа магистратуры

Направление подготовки (специальность)

01.04.01 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки

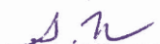
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения,
динамические системы, оптимальное управление»

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

магистр

(указывается квалификация)

Разработчики (составители) <u>д.ф.-м.н., профессор</u> (должность, ученая степень, ученое звание)	 / <u>Гайсин А.М.</u> (подпись, Фамилия И.О.)
---	--

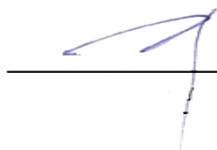
Для приема: 2021

Уфа 2021 г.

Составитель / составители: профессор, д.ф.-м.н., Гайсин А.М.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа протокол № 6 от « 26 » января 2021 г.

Заведующий кафедрой

 / Ишкин Х.К.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры математического анализа, протокол № _____ от « _____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой _____ / _____ /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры математического анализа, протокол № _____ от « _____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой _____ / _____ /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры математического анализа, протокол № _____ от « _____ » _____ 20 _ г.

Заведующий кафедрой _____ / _____ /

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине
7. Приложение 1: Содержание рабочей программы

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знания	Знать историческое значение исследуемой проблемы, современное состояние исследуемой проблемы, основные методы решения классических задач математики	ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе	
	Знать методологические приемы представления научных знаний, формы представления новых научных результатов – презентации, статьи в периодической печати, монографии и т.д.	ПК-3: способностью публично представить собственные новые научные результаты	
Умения	Уметь видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач	ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе	

	<p>Уметь обрабатывать полученные результаты, анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, представлять итоги проделанной работы в виде отчетов, рефератов, статей, оформленных в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати</p>	<p>ПК-3: способностью публично представить собственные новые научные результаты</p>	
<p>Владения (навыки / опыт деятельности)</p>	<p>Владеть адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы</p>	<p>ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе</p>	
	<p>Владеть приемами публично представить собственные новые научные результаты, методами построения математических моделей реальных объектов и выработать на их основе практические рекомендации</p>	<p>ПК-3: способностью публично представить собственные новые научные результаты</p>	

2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Цели изучения дисциплины:

- анализ и обобщение результатов научно-исследовательских работ в области функционального анализа

- углубить и расширить знания, полученные в ходе изучения курса «Функционального анализа», для дальнейшего их применения в научно-исследовательской работе

Дисциплина «Дополнительные главы функционального анализа» относится к *вариативной* части.

Дисциплина изучается на 2 курсе в 4 семестре.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, полученные в ходе изучения следующих дисциплин: математический анализ, функциональный анализ, а также знания по теории общих и классических рядов Фурье, ортогональных рядов, в частности, с рядами по полиномам Лежандра, Чебышева, Эрмита, а также с рядов Фурье по тригонометрическим системам.

3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4. Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 «не удовлетв орительн о»	3 «удовлетворите льно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Первый этап (уровень)	1. Знать историческое значение исследуемой проблемы, современное состояние исследуемой проблемы, основные методы решения классических задач математики	Фрагментарные знания об историческом значении исследуемой проблемы, основных методах решения классических задач математики	Частичные знания об историческом значении исследуемой проблемы, основных методах решения классических задач математики	Полные и четкие, но содержащие отдельные пробелы знания об историческом значении исследуемой проблемы, основных методах решения классических задач математики	Полные и четкие знания об историческом значении исследуемой проблемы, основных методах решения классических задач математики

<p>Второй этап (уровень)</p>	<p>1. Уметь видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач</p>	<p>Фрагмент арные умения понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач</p>	<p>Частичные умения видеть понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач</p>	<p>В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы умения понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач</p>	<p>Сформированное умение понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач</p>
<p>Третий этап (уровень)</p>	<p>Владеть адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы</p>	<p>Фрагмент арные владения адекватным математическим</p>	<p>В целом успешное, но не систематическое владение адекватным математическим аппаратом для ведения научно-</p>	<p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение адекватным математически</p>	<p>Успешное и систематическое владение адекватным математическим аппаратом для ведения научно-</p>

		аппаратом для ведения научно-исследовательской работы	исследовательской работы	м аппаратом для ведения научно-исследовательской работы	исследовательской работы
--	--	---	--------------------------	---	--------------------------

ПК -3: способность публично представить собственные новые научные результаты

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)				
		2 «не удовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Первый этап (уровень)	Знать методологические приемы представления научных знаний, формы представления новых научных результатов – презентации, статьи в периодической печати, монографии и т.д.	Фрагментарные знания о методологических приемах представления научных знаний, формах представления новых научных результатов – презентации, статьях в периодической печати, монографии и т.д.	Частичные знания о методологических приемах представления научных знаний, формах представления новых научных результатов – презентациях, статьях в периодической печати, монографии и т.д.	Полные и четкие, но содержащие отдельные пробелы знания о методологических приемах представления научных знаний, формах представления новых научных результатов – презентации, статьях в периодической печати, монографии и т.д.	Полные и четкие знания о методологических приемах представления научных знаний, формах представления новых научных результатов – презентациях, статьях в периодической печати, монографии и т.д.
Второй этап (уровень)	Уметь обрабатывать полученные результаты,	Фрагментарные умения обрабатывать полученные	Неполные умения обрабатывать полученные результаты, анализировать и	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Сформированное умение обрабатывать полученные

	анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, представлять итоги проделанной работы в виде отчетов, рефератов, статей, оформленных в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати	результаты, анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий	осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий	обрабатывать полученные результаты, анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий	результаты, анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий
Третий этап (уровень)	Владеть приемами публично представить собственные новые научные результаты, методами построения математических	Фрагментарные владения приемами публично представить собственные новые научные результаты, методами построения математических моделей реальных	Неполные представления о владении приемами публично представить собственные новые научные результаты, методами построения математических моделей	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение приемами публично представить собственные новые научные	Успешное и систематическое применение навыков владения приемами публично представить собственные новые научные

	моделей реальных объектов и выработать на их основе практические рекомендации	объектов и выработать на их основе практические рекомендации	реальных объектов и выработать на их основе практические рекомендации	результаты, методами построения математических моделей реальных объектов и выработать на их основе практические рекомендации	результаты, методами построения математических моделей реальных объектов и выработать на их основе практические рекомендации
--	---	--	---	--	--

Показатели сформированности компетенции:

Критериями оценивания являются оценки, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения разделов дисциплины, а именно — оценивается выполнение контрольных работ, ответы на занятиях, доклады, ответы на экзамене и защита РГР.

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	Знать историческое значение исследуемой проблемы, современное состояние исследуемой проблемы, основные методы решения классических задач математики	ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе	Контр.работа, доклад, экзамен
	Знать методологические приемы представления научных знаний, формы представления новых научных результатов – презентации, статьи в периодической печати, монографии и т.д.	ПК -3: способность публично представить собственные новые научные результаты	Контр.работа, доклад, экзамен
2-й этап Умения	Уметь видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения, корректно ставить научные задачи, применять классические методы при решении поставленных задач	ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе	Контр.работа, доклад, экзамен
	Уметь обрабатывать полученные результаты, анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных, вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий, представлять итоги проделанной работы в виде отчетов, рефератов, статей, оформленных в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных	ПК -3: способность публично представить собственные новые научные результаты	Контр.работа, доклад, экзамен

	средств редактирования и печати		
3-й этап Владеть навыками	Владеть адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы	ПК-1: способностью к интенсивной научно-исследовательской работе	Контр.работа, доклад, экзамен
	Владеть приемами публично представить собственные новые научные результаты, методами построения математических моделей реальных объектов и выработать на их основе практические рекомендации	ПК -3: способность публично представить собственные новые научные результаты	Контр.работа, доклад, экзамен

Экзаменационные вопросы:

1. Евклидовы пространства.
2. Определение. Примеры ортогональных базисов.
3. Теорема об ортогонализации.
4. Ряды Фурье по заданной ортонормированной системе.
5. Задача о наилучшем приближении.
6. Полные и замкнутые системы.
7. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
8. Полные евклидовы пространства.
9. Теорема Рисса-Фишера.
10. Критерий полноты ортонормированной системы.
11. Определение и свойства пространства $L_1(X, \mu)$. Полнота.
12. Всюду плотные множества в $L_1(X, \mu)$.
13. Сепарабельность. Определение и основные свойства пространства $L_2(X, \mu)$.
14. Полнота, сепарабельность.
15. Сходимость в среднем квадратичном, в среднем, равномерная сходимость, сходимость по мере, почти всюду. Связь между ними.
16. Примеры для случаев $\mu(X) < \infty$, $\mu(X) = \infty$.
17. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.
18. Условия равномерной сходимости ряда Фурье.
19. Теорема Фейера.
20. Полнота тригонометрической системы.
21. Теорема Вейерштрасса

Образец экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Направление подготовки 01.04.01 - Математика
Экзаменационный билет №1

по курсу «Дополнительные главы функционального анализа»

1. Евклидовы пространства.
2. Сходимость в среднем квадратичном, в среднем, равномерная сходимость, сходимость по мере, почти всюду. Связь между ними

Зав. кафедрой _____ / Ишкин Х.К.

Критерии оценки

Критерии оценки (в баллах):

- **5 баллов (отлично)** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.
- **4 (хорошо)** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.
- **3 (удовл)** баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.
- **2 (неудовлетворительно)** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить на серию дополнительных вопросов.

Список тем на семинары

1. Тригонометрическая система в $L_2[-\pi; \pi]$.
2. Классический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов.
3. Сходимость в $L_2[-\pi; \pi]$ ряда Фурье.
4. Тригонометрические системы в $L_2[0; \pi]$.
5. Ряд Фурье в комплексной форме.
6. Многочлены Лежандра.
7. Многочлены, ортогональные относительно данного веса.
8. Многочлены Чебышева.
9. Ортогональный базис в пространствах $L_2[-\infty; +\infty]$ и $L_1[0; +\infty]$.
10. Многочлены Эрмита и Лагерра.
11. Системы Хаара.

Система оценивания:

За доклады выставляются текущие оценки, которые потом преподаватель учитывает при допуске к экзамену, на самом экзамене, при защите РГР.

- **5 баллов (отлично)** выставляется студенту, если студент представил полный, развернутый доклад по своей теме. Показал владение теоретическим материалом, а также знание тонких моментов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.
- **4 (хорошо)** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном тему своего доклада, однако допущены неточности в определении основных понятий, а также были незначительные недочеты в понимании представленного материала
- **3 (удовл)** баллов выставляется студенту, если в докладе были допущены существенные ошибки, студент не смог ответить на некоторые вопросы по теме, тема раскрыта не полностью.
- **2 (неудовлетворительно)** выставляется студенту, если студент не подготовился к докладу и не смог раскрыть тему, ответить на вопросы

В семестре студенты выполняют 2 контрольные работы

Варианты контрольной работы

Контрольная работа №1

1. Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением:
а) Евклидовое; б) Нормированное; в) гильбертово.
2. Неравенство $\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2$ называется *неравенством*:
а) Парсеваля; б) Бесселя; в) Фурье; г) Коши-Буняковского.
3. Изоморфны между собой:
а) любые два сепарабельных гильбертовых пространства;
б) любые два евклидовых пространства бесконечного числа измерений;
в) любые два евклидовых пространства конечного числа измерений.
4. Полное нормированное пространство называется...
5. Пространство называется сепарабельным, если...

Контрольная работа №2

1. Норма в L_2 определяется формулой:
а) $\|f\| = \sqrt{\int f^2(x) d\mu}$; б) $\|f\| = \int |f(x)| d\mu$.
2. Сходимость функциональной последовательности в смысле метрики пространства L_1 называется:
а) Сходимостью в среднем квадратичном;
б) Сходимостью в среднем.
3. При каком условии в пространстве $L_1(X, \mu)$ существует счетное всюду плотное множество функций?
4. В пространстве $L_2(X, \mu)$ скалярное произведение определено формулой:

5. Выберите верные утверждения при условии, что $\mu(X) < \infty$:
- a) Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_2(X, \mu)$ сходится в метрике $L_2(X, \mu)$, то она сходится и в метрике $L_1(X, \mu)$;
 - b) Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_1(X, \mu)$ сходится в метрике $L_1(X, \mu)$, то она сходится и в метрике $L_2(X, \mu)$;
 - c) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем квадратичном, то она сходится равномерно;
 - d) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то она сходится и в среднем квадратичном.

Описание методики оценивания:

Критерии оценки (в баллах):

За контрольную работу студент получает текущие оценки, которые потом преподаватель учитывает при допуске к экзамену, на самом экзамене, при защите РГР.

- 5 баллов выставляется студенту, все задачи решены верно;
- 4 балла выставляется студенту, если верно решены больше 80% но меньше 100% задач;
- 3 баллов выставляется студенту, если правильно решены больше 50%, но меньше 80% задач
- 2 (неудовлетворительно) в остальных случаях

Задания для расчетно-графической работы

В ходе решения РГР студент должен ответить на все теоретические вопросы каждого блока заданий, а также решить по 2 задачи по каждой из тем.

14. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение линейного оператора.
2. Дать определения непрерывного и ограниченного оператора. Как связаны понятия непрерывности и ограниченности для линейного оператора?
3. Привести различные определения нормы линейного непрерывного оператора.

ЗАДАЧИ

1. Найти общий вид линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Показать, что он ограничен.
2. Проверить линейность, ограниченность, непрерывность следующих операторов. Найти их нормы, если они линейны и ограничены.

a) $(Ax)(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$

b) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[2, 4];$

c) $A_\lambda : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1); \quad (A_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t < \lambda; \\ 0, & \text{если } t > \lambda; \end{cases}$

d) $(Ax)(t) = x'(t), \quad A : C^{(1)}[-\pi, \pi] \rightarrow C[-\pi, \pi];$

e) $(Ax)(t) = x'(t), \quad A : C^{(1)}[-\pi, \pi] \rightarrow C[-\pi, \pi],$

$$\|x\|_{C^{(1)}} = \|x\|_C;$$

f) $Ax = (\xi_3, \xi_4, \dots), \quad A : \ell^3 \rightarrow \ell^3;$

g) $Ax = (\xi_1 + 3, \xi_2, \xi_3, \dots), \quad A : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty;$

h) $(Ax)(t) = \int_8^t s^2 x^2(s) ds, \quad A : C[8, 10] \rightarrow C[8, 10].$

3. Пусть $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad Ax = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots),$ где $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная числовая последовательность. Установить критерий непрерывности оператора A . Найти норму A .

4. Для каких $a(t)$ оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ непрерывен в $C[0, 1]$? В $L^2(0, 1)$? Найти нормы.
5. Для каких α, β оператор $(Ax)(t) = t^\beta \cdot x(t^\alpha)$ ограничен в $L^2(0, 1)$? Найти $\|A\|$.
6. Доказать, что если $A : X \rightarrow Y$ — линейный непрерывный оператор, то он остается непрерывным при замене нормы в X и Y на эквивалентные.
7. Пусть L — замкнутое подпространство гильбертова пространства H . Доказать линейность, непрерывность и найти норму оператора $P : H \rightarrow L$, который каждому элементу $x \in H$ сопоставляет его проекцию на L (P называется проектором на L).

15. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение обратного оператора.
2. Сформулировать теоремы (достаточные условия) существования операторов A^{-1} , $(I + A)^{-1}$, $(A + \Delta A)^{-1}$.
3. Сформулировать теорему Банаха об обратном операторе.

ЗАДАЧИ

1. Пусть оператор $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ определяется равенством:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Доказать ограниченность оператора A , оценить $\|A\|$, найти A^{-1} .

2. При каких $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ существует обратный оператор к оператору $Ax = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots)$, $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$? Когда A^{-1} непрерывен?
3. Проверить, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dt} : C^{(1)}[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ имеет правый обратный, но не имеет левого обратного.

4. Найти обратный оператор к оператору $\frac{d}{dt} : X \rightarrow C[0, 1]$, где $X = \{x \in C^{(1)}[0, 1] : x(0) = 0\}$.

5. Пусть $X = \{x \in C^{(2)}[0, 1] : x(0) = x(1) = 0\}$. Найти обратный к оператору $\frac{d^2}{dt^2} + \lambda : X \rightarrow C[0, 1]$, если он существует. Для каких λ существует обратный оператор?

6. При каких λ существует обратный оператор к оператору

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi + \lambda \cdot x(t), \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]?$$

Построить A^{-1} .

7. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, если

- a) $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$;
- b) $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, \dots)$;
- c) $Ax = (\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3, 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, \dots)$;
- d) $Ax = (\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \dots)$.

8. Пусть $(Ax)(t) = (t + 1)x(t)$, $(Bx)(t) = x(t^2)$ — операторы в $C[0, 1]$. Чему равны $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$?

9. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$. Доказать, что

- a) если существуют A^{-1} , B^{-1} , то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- b) если существуют A^{-1} , $(BA)^{-1}$, то существует B^{-1} .

Указание. $B^{-1} = A(BA)^{-1}$.

10. Пусть X — банахово пространство с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Если $\exists C_1 > 0$ такое, что $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ для $\forall x \in X$, то $\exists C_2 < \infty$ такое, что $\|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$, $\forall x \in X$. Доказать.

11. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$, причем существует $(I - AB)^{-1}$. Доказать, что существует $(I - BA)^{-1}$.

Указание. $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

**17. ТЕОРЕМА ХАНА-БАНАХА.
СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТИ**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулировать теорему Хана-Банаха и следствия из нее.
2. Дать определения сильной и слабой сходимости последовательности функционалов, определение слабой сходимости последовательности элементов.
3. Сформулировать критерий слабой сходимости последовательности функционалов и элементов.

ЗАДАЧИ

1. Найти все линейные непрерывные продолжения функционала

$$f(x) = 4\xi_1, \quad x = \xi_1 \in \mathbb{R}^1$$

на пространство \mathbb{R}^3 с сохранением нормы, если \mathbb{R}^3 рассматривается с нормой

- a) $\|x\| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$;
- b) $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|$;
- c) $\|x\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|, |\xi_3|)$.

2. Найти все линейные непрерывные продолжения функционала

$$f(x) = \xi_1 + \xi_2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p}$$

на пространство \mathbb{R}^2 с сохранением нормы, если

- a) $p = 1$;
- b) $1 < p < \infty$.

3. Доказать, что последовательность функционалов

$$F_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{int} dt$$

слабо сходится в $L^2(-\pi, \pi)$, но сильной сходимости нет.

4. Покажите, что существует последовательность конечных линейных комбинаций функционалов $F_t(x) = x(t)$, сходящаяся слабо к функционалу $F(x) = \int_0^1 x(t) dt$ (функционалы определены в пространстве $C[0, 1]$). Имеется ли последовательность, сходящаяся по норме?

5. Пусть

$$F_n(x) = n \cdot \left[x\left(\frac{1}{n}\right) + x\left(-\frac{1}{n}\right) - 2x(0) \right], \quad F(x) \equiv 0.$$

Показать, что последовательность $\{F_n\}$

- сходится по норме к F в $C^{(2)}[-1, 1]$;
- сходится слабо к F в $C^{(1)}[-1, 1]$, но не сходится сильно;
- не сходится даже слабо в $C[-1, 1]$.

Указания.

- Использовать формулу Тейлора.
- Оценить нормы $\|F_n\|$ снизу:

$$x'_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > \frac{1}{n}, \\ nt, & \text{если } |t| < \frac{1}{n}, \\ -1, & \text{если } t < -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

- Показать, что последовательность $\{\|F_n\|\}$ неограничена.

6. Пусть

$$F_n(x) = n^2 \cdot \left[x\left(\frac{1}{n}\right) + x\left(-\frac{1}{n}\right) - 2x(0) \right], \quad F(x) = x''(0).$$

Показать, что последовательность $\{F_n\}$

- сходится к F по норме в $C^{(3)}[-1, 1]$;
- сходится слабо к F в $C^{(2)}[-1, 1]$, но не сходится сильно;
- не сходится даже слабо в $C^{(1)}[-1, 1]$.

7. Доказать, что слабая сходимость в ℓ^2 сильнее покоординатной сходимости.

8. Какие из последовательностей сходятся сильно, слабо в ℓ^2 ?

a) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right);$

b) $x_n = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}, 1, 0, \dots);$

c) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right);$

d) $x_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right);$

e) $x_n = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right);$

f) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right).$

9. Исследовать на сильную и слабую сходимости следующие последовательности в $L^2(0, 1)$:

a) $x_n(t) = t^n;$

b) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{если } t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right); \end{cases}$

c) $x_n(t) = e^{i\sqrt{nt}};$

d) $x_n(t) = \sin(t \ln n);$

e) $x_n(t) = \cos(n^2 t);$

f) $x_n(t) = \sin(e^n t);$

g) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} \cdot (1 - nt), & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{если } t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right); \end{cases}$

h) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

i) $x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), & \text{если } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{если } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$

10. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset H$ слабо сходится к x . Доказать, что $\{x_n\}$ будет сходиться сильно при выполнении одного из условий:

- a) $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$;
- b) $\|x_n\| \leq \|x\| \quad \forall n > N_0$;
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|$.

18. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определения сопряженного оператора к линейному непрерывному оператору в нормированном и гильбертовом пространствах.
2. Какая связь между сопряженным оператором в H и сопряженным оператором в нормированном пространстве, когда в качестве нормированного пространства рассматривается H ?
3. Перечислить свойства сопряженного оператора.

ЗАДАЧИ

1. Найти сопряженный оператор к оператору $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, определяемому равенством

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

2. Найти сопряженный оператор к проектору $P : H \rightarrow L$, где L — замкнутое подпространство в H .
3. Найти сопряженный оператор к оператору $A : X \rightarrow X$, если
 - a) $X = \ell^2, \quad Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$;

- b) $X = \ell^2$, $Ax = (\alpha_j \xi_j, \alpha_{j+1} \xi_{j+1}, \dots)$;
 c) $X = \ell^1$, $Ax = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$;
 d) $X = \ell^p$, $Ax = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, \xi_1, 0, 0, \dots)$, $1 \leq p < \infty$;
 e) $X = \ell^p$, $Ax = (\xi_2, \xi_1, \xi_4, \xi_3, \dots)$;
 f) $X = L^2(0, 1)$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi$;
 g) $X = L^2(0, 1)$, $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$;
 h) $X = L^2(0, 1)$, $(A_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } 0 \leq t \leq \lambda, \\ 0, & \text{если } \lambda < t \leq 1, \end{cases}$
 где $\lambda \in (0, 1)$ – фиксированное число;
 i) $X = H$, $Ax = (x, y) \cdot z$, где $y, z \in H$ – фиксированы;
 j) $X = L^2(0, 1)$, $(Ax)(t) = \int_0^1 t x(s) ds$.

4. Пусть оператор $\Phi : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ определяется равенством $\Phi(A) = A^*$, где X, Y – нормированные пространства. Доказать, что Φ непрерывен.
 5. Доказать, что если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, то существует $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, причём $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
 6. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, Y – нормированное, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Доказать, что $(A^*)^* = A$, как оператор из X в Y .

Критерии оценки РГР:

1. - оценка «зачтено» выставляется студенту, если нет замечаний или если имеются не-существенные замечания;
2. - оценка «не зачтено» выставляется в остальных случаях.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. МГУ им. М.В. Ломоносова М.: Физматлит, 2009. <https://e.lanbook.com/book/2206>

Дополнительная литература

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. Издательство: Лань, 2009. <https://e.lanbook.com/book/245>
2. Семина Г.М., Данченков И.В.. Ряды Фурье. Преобразования Фурье. Практикум. Изд.:МИСИС, 2018

3. Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2002
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613>.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика: учебное пособие. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2005
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68363>.
5. Волков В. А.. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона: Учебное пособие. Изд-во Уральского университета, 2014.
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276566>

5.2. Перечень ресурсов информаци-

онно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

А. Ресурсы «Интернет»

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elib.bashedu.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://www.biblioclub.ru
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети	http://e.lanbook.com

В. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Оборудование	Программное обеспечение
Аудитории № 517, №523, №531	Лекции	<p>№517: Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор. ДА32.</p> <p>№523: Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p>№531: Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (2101068302), доска аудитор. ДА32.</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.</p>
Аудитории № 517, 526, 528	Лабораторные занятия	<p>№517: Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, экран настенный ProjectaSlimScreen 200*200 cmMatteWhite, потолочное крепление для проектора, доска аудитор. ДА32.</p> <p>526, 528: Учебная мебель, доска</p>	<p>1.Windows8Russian.WindowsProfessional 8RussianUpgrade.Договор№104от 17.06.2013г.Лицензиибессрочные.</p> <p>2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian. Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.</p>
Аудитории № 523, 526, 528	Групповые и индивидуальные	Учебная мебель, доска	

	консультации		
Читальный зал №2 (физико-математический корпус)	Самостоятельная работа	Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт	1.Windows8Russian.WindowsProfessional8RussianUpgrade.Договор№104от17.06.2013г.Лицензиибессрочные. 2.MicrosoftOfficeStandard2013Russian.Договор№114от12.11.2014г.Лицензии бессрочные.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины дополнительные главы функционального анализа на 4 семестр
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	55,7
лекций	18
практических/ семинарских	0
лабораторных	36
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	34,8
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	89,5

Форма(ы) контроля:

экзамен 4 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)					Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		Всего	ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Общие ряды Фурье в евклидовых пространствах. Евклидовы пространства. Определение. Примеры ортогональных базисов. Теорема об ортогонализации. Ряды Фурье по заданной ортонормированной системе. Задача о наилучшем приближении. Полные и замкнутые системы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса-Фишера. Критерий полноты ортонормированной	35	4		9	22	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.1,п.1.1-1.2; упр.1.1-1.5	Контрольная работа, доклад

	системы.								
2.	<p>Пространства суммируемых функций. Определение и свойства пространства $L_1(X, \mu)$. Полнота. Всюду плотные множества в $L_1(X, \mu)$. Сепарабельность. Определение и основные свойства пространства $L_2(X, \mu)$. Полнота, сепарабельность. Сходимость в среднем квадратичном, в среднем, равномерная сходимость, сходимость по мере, почти всюду. Связь между ними. Примеры для случаев $\mu(X) < \infty$, $\mu(X) = \infty$.</p>	36	4		9	23	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.1,1.3; упр. 1.6-1.11	Контрольная работа, доклад
3.	<p>Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам.</p>	37	6		9	22	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.2, 2.1-2.3; упр. 2.1-2.5	Доклад

	<p>Тригонометрическая система в $L_2[-\pi; \pi]$. Классический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов. Сходимость в $L_2[-\pi; \pi]$ ряда Фурье. Тригонометрические системы в $L_2[0; \pi]$. Ряд Фурье в комплексной форме. Многочлены Лежандра. Многочлены, ортогональные относительно данного веса. Многочлены Чебышева. Ортогональный базис в пространствах $L_2[-\infty; +\infty]$ и $L_1[0; +\infty]$. Многочлены Эрмита и Лагерра. Системы Хаара.</p>								
4.	<p>Условия сходимости ряда Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной</p>	35,5	4		9	22,5	Осн.[1],[2] Доп.[1]-[6]	Доп. [3], гл.2, 2.4-2.5; упр. 2.6-2.14	доклад

сходимости ряда Фурье. Теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса									
Всего часов:	143,5	18		36	89,5				