

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Утверждено:

на заседании кафедры математического анализа  
протокол от «26» января 2021 г. № 6  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Х.К. Ишкин

Согласовано:

Председатель УМК факультета

\_\_\_\_\_ / А.М.Ефимов

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина «Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций»  
(наименование дисциплины)

—  
Обязательная часть

(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультатив))

**программа магистратуры**

Направление подготовки

01.04.01 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки)

Направленность (профиль) подготовки

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» —

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

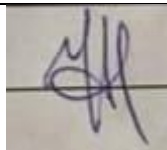
Квалификация магистр

(указывается квалификация)

Разработчик (составитель)

Профессор, д.ф.-м.н.

(должность, ученая степень, ученое звание)



/Фазуллин З.Ю.  
(подпись, Фамилия И.О.)

Для приема: 2021 года

Уфа 2021 г

Составитель: Фазуллин З.Ю.

Рабочая программа дисциплины *утверждена* на заседании кафедры протокол от «26»января 2021 г. № 6

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры на основании приказа Приказа Минобрнауки России от 26.11.2020 №1456 «О внесении изменений в федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования», Приказа БашГУ от 09.06.2021 №770 «О внесении изменений в образовательные программы высшего образования – программы бакалавриата, программы специалитета и программы магистратуры», протокол № 11 от «10» июня 2021 г.

Заведующий кафедрой



Х.К. Ишкин

## **Список документов и материалов**

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
  - 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.
  - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
  - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
  - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	<i>Знать ...</i> Основы анализа . <i>Уметь</i> Решать задачи анализа
		ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<i>Уметь</i> использовать методы Теории субгармонических и плюрисубгармонических функций профессиональной деятельности
		ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	<i>Владеть</i> Навыками решения математических и физических задач с использованием Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Целями освоения дисциплины (модуля) " Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций " являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области современной теории комплексного анализа;
- 2) овладение современными методами анализа;

3) формирование практических навыков решения задач анализа. Дисциплина «Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций» является дисциплиной Обязательная часть Б1.О.11 (3-4 семестры)

Дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как Спектральная теория дифференциальных операторов, Обобщенные функции, Выпуклый анализ, Локально-выпуклые пространства, Дополнительные главы функционального анализа, Избранные главы математического анализа, Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: Обобщенные функции, Выпуклый анализ, Избранные главы математического анализа, Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотношенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции

ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-1.1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	<i>Знать ...</i> Основы выпуклого анализа. <i>Уметь</i> Решать задачи выпуклого анализа	Отсутствие знаний	Частичные знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем	Полные и четкие, но содержащие отдельные пробелы знания содержания материала по комплексному анализу, основных методов	Полные и четкие знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем преподаваемой

				решения задач, основных теорем преподаваемой дисциплины	дисциплины
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности	<i>Уметь</i> использовать методы выпуклого анализа в профессиональной деятельности	Отсутствие умений	Фрагментарные умения решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы умения решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	Сформированное умение решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету
ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	<i>Владеть</i> Навыками решения математических и физических задач с использованием выпуклого анализа	Отсутствие владений	В целом успешные, но не систематические владения способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы владения способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	Успешные владения способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики		
ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики.	<i>Знать:</i> Основы выпуклого анализа . <i>Уметь</i> Решать задачи комплексного анализа	РГР, экзамен
ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	<i>Уметь:</i> использовать методы выпуклого анализа в профессиональной деятельности	РГР, экзамен
ОПК-1.3. Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	<i>Владеть:</i> Навыками решения математических и физических задач с использованием выпуклого анализа	РГР, экзамен

Экзамен является оценочным средством.

Структура экзаменационного билета: билет состоит из 2 вопросов, по 1 из каждой части, на которые условно делится прочитанный в течение семестра лекционный курс.

### Вопросы для подготовки к экзамену

#### Часть 1 (3 семестр)

Гармоническая мера

Примеры субгармонических функций

Выпуклые функции и выпуклые множества

Полунепрерывность

Теория интегрирования и теорема Грина

Гармонические функции их приложения

Определение субгармонической функции. Примеры.

Неравенство Иенсена

Принцип максимума

Субгармонические функции и интеграл Пуассона ...

Метод Перрона и задача Дирихле

Теоремы выпуклости

Мера и интегрирование

Линейные функционалы

Конструкция меры и интеграла Лебега (теорема Ф. Рисса)

Формулировка и доказательство теоремы Рисса о представлении

Гармоническая мера

Функция Грина и формула Пуассона — Иенсена . . .

Гармонические продолжения и наименьшие гармонические мажоранты

## **Часть 2 (4 семестр)**

Теория Неванлинны

Емкостный потенциал и емкость

Полярные множества

Емкость и меры Хаусдорфа

Обобщенный принцип максимума или принцип Фрагмена—Линделёфа

Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции

Аналитические отображения и конструкции комплексных пространств

Плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклые и псевдovoгнутые области и их обобщения

Плюрисубгармонические функции и их свойства

Аппроксимация .

Верхняя огибающая  $\text{psh}$  функций



## Вопросы заданий РГР

Построение субгармонических функций с условиями роста вне множеств малой меры  
Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции  
Принцип Фрагмена—Линделёфа  
Гармоническая мера и нулевые множества аналитических функций  
Теоремы деления в классах аналитических функций и субгармонические функции

## Образцы билетов для проведения экзамена

**Башкирский государственный университет**  
Кафедра математического анализа  
«Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций»  
20\_\_-20\_\_ учебный год  
Билет № 13

1. Определение субгармонической функции. Примеры.

2. Емкостный потенциал и емкость

Заведующий кафедрой,  
д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К..

**Башкирский государственный университет**  
Кафедра математического анализа  
«Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций»  
20\_\_-20\_\_ учебный год  
Билет № 14

1. Неравенство Иенсена

.2. Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции

Заведующий кафедрой,  
д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К..

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

#### а) основная литература

1. Привалов И.И., «Введение в теорию функций комплексного переменного», СПб.: Лань, 2009. <https://e.lanbook.com/book/322>
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. Издательство "Лань" 2008. 448 С. <https://e.lanbook.com/book/134?category=910>

#### б) дополнительная литература

1. А. Садуллаев, Плюрисубгармонические функции, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 1985, том 8, 65–113 <http://mi.mathnet.ru/rus/intf/v8/p65>
2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2-х томах. — М.: Наука, 1976. — 720 с..
3. И. И. Привалов, О некоторых вопросах теории субгармонических и аналитических функций, Матем. сб., 1934, том 41, номер 4, 527–550 <http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v41/i4/p527>
4. Хейман, У. Субгармонические функции = Subharmonic functions / У. Хейман, П. Кеннеди ; под ред. Е. Д. Соломенцева; пер. с англ. В. В. Вавилова .— М. : Мир,
5. Привалов, И.И. Субгармонические функции / И.И. Привалов. — М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. технико-теорет. лит., 1937. — 200 с. — (Математика в монографиях / Под ред. С.Н. Бернштейна и др. Основная серия ; Кн. II)
6. Владимиров В. С., Жаринов В. В., Уравнения математической физики, Физико-математическая литература, М., 2000
7. Юлмухаметов, Ринад Салаватович. Выпуклый анализ : учеб. пособие / Р. С. Юлмухаметов, К. П. Исаев, К. В. Трунов ; БашГУ .— Уфа : РИЦ БашГУ, 2007

### 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы

#### А. Ресурсы интернет

1. «Электронная библиотека БашГУ» <http://www.elib.bashedu.ru>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.biblioclub.ru>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://e.lanbook.com>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы: Maple (компьютерный класс)..

#### Б. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian/. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор №104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
2. Microsoft Office Standart 2013 Russian. Договор № 114 от 12ю11ю2014. Лицензии бессрочные.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное), аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитория № 501 (физмат корпус - учебное), аудитория № 515 (физмат корпус - учебное), аудитория №522 (физмат корпус - учебное)</p> <p><b>5. помещения для самостоятельной работы:</b> аудитория № 426 (физмат корпус - учебное), читальный зал №2 (физмат корпус - учебное)</p>	<p align="center"><b>Аудитория № 501</b></p> <p>Учебная мебель, доска настенная меловая, персональный комп. и системный блок /Corei5-4460(3.2)/CIGABAYTEGV-N710D3-1GL/4Gb, Презентер LogitechWirelessPresenterR400 (210134000003592), проектор SonyVPL-DX270, экран ручной ViewScreenLotus 244x183 WLO-4304</p> <p align="center"><b>Аудитория №515</b></p> <p>Учебная мебель, доска настенная меловая</p> <p align="center"><b>Аудитория №426</b></p> <p>Учебная мебель, доска, персональные компьютеры LenovoThinkCentreA70zIntelPentiumE 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., шкаф TLKTWP-065442-G-GY</p> <p align="center"><b>Аудитория №522</b></p> <p>Учебная мебель, доска, персональный компьютер LenovoThinkCentre A70z IntelPentium E 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер LessarLS/LU-H24KB2.</p> <p align="center"><b>Читальный зал №2</b></p> <p>Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>3. Simply Linux x86_64 (лицензионный договор на программное обеспечение Simply Linux 8.2.0 и включенные для него программы для ЭВМ, свободное программное обеспечение)</p> <p>4. Коллекция компиляторов GCC. (лицензия GNU GPL, свободное программное обеспечение).</p> <p>5. Файловыйменеджер GNU Midnight Commander (MC). (лицензия GNU GPL, свободное программное обеспечение).</p>
---	--	--

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины *Теория субгармонических и плюрисубгармонических функций*  
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	3+4=6/256
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
лекций	12 +18=30
практических/ семинарских	
лабораторных	24+18=42
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем), ФКР	1,2+1,7=2.9
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	45+71,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	25,8+34,8

Форма(ы) контроля:  
экзамен\_3, 4 семестр  
РГР 4 семестр

В том числе:  
РГР 4 семестр, контактных часов – 4, часов на самостоятельную работу – 10

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Принцип максимума	1		2	4	1-8		Зачет экзамен
2.	Субгармонические функции и интеграл Пуассона ...	1		2	4	1-8		Зачет Экзамен
3.	Метод Перрона и задача Дирихле	1		2	4	1-8		Зачет Экзамен
4.	Теоремы выпуклости	1		2	4	1-8		РГР Зачет Экзамен
5.	Мера и интегрирование	1		2	4	1-8		экзамен
6.	Линейные функционалы	1		2	4	1-8		Экзамен
7.	Конструкция меры и	1		2	4	1-7		Экзамен

	интеграла Лебега (теорема Ф. Рисса)							
8.	Формулировка и доказательство теоремы Рисса о представлении	1		2	4	1-8		РГР Экзамен
9.	Гармоническая мера	1		2	4	1-8		Доклад и подготовленная презентация Экзамен
10.	Функция Грина и формула Пуассона — Иенсена . . .	1		3	4	1-8		РГР Зачет
11.	Гармонические продолжения и наименьшие гармонические мажоранты	2		3	5	1-8		Зачет Экзамен
12.	<b>4-й семестр</b>  Теория Неванлинны	2		2	6	1-8		Зачет Экзамен
13.	Емкостный потенциал и	1		2	6	1-7		Зачет

	емкость							
14.	Полярные множества	2		1	6	1,2,8		Зачет Экзамен
15.	Емкость и меры Хаусдорфа	1		2	6	1,2,8		Зачет
16.	Обобщенный принцип максимума или принцип Фрагмена—Линделёфа	2		1	6	1-7		РГР Зачет
17.	Обобщенный принцип максимума или принцип Фрагмена—Линделёфа	1		1	6	1,2,8		Доклад и подготовленная презентация
18.	Приближение субгармонической функции логарифмом целой функции	2		1	6	1,2,7		Экзамен
19.	Аналитические отображения и конструкции комплексных пространств	1		1	6			Доклад



20.	Плюрисубгармонические функции, псевдовыпуклые и псевдогогнутые области и их обобщения	2		2	6	1-8		РГР Экзамен Доклад
21.	Аппроксимация .	1		2	6	1-8		Экзамен
22.	Верхняя огибающая psh функций	2		2	6			экзамен
23.	Связь psh функций с голоморфными функциями	1		1	5			
	Всего часов	30		42	45+71,5			

