ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИКО - ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждено: на заседании кафедры дифференциальных уравнений протокол № 6 от «20» января 2021 г. зав. кафедрой __________ /*Юмагулов М.Г.*	Согласовано: Председатель УМК ФТИ _______________ / *Балапанов М.Х.*

Рабочая программа дисциплины (модуля)

дисциплина **Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление.**

(наименование дисциплины)

Базовая часть

(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору)

Программа бакалавриата

Направление подготовки (специальность)
03.03.02 ***Физика***

Направленность (профиль) подготовки
Медицинская физика

Квалификация
бакалавр

Разработчик (составитель) доцент, к.ф.-м.н. (должность, ученая степень, ученое звание)	______________ / Сагитова А.Р. (подпись, Фамилия И.О.)

Для приема: 2021

Уфа 2021 г.

Составитель: к.ф.м.н, доцент Сагитова А.Р.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры дифференциальных уравнений протокол от «3» сентября 2021 г. № 2

Заведующий кафедрой ______________/ Юмагулов М.Г.

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций[1] (при наличии ОПК)	**Формируемая компетенция (с указанием кода)**	**Код и наименование индикатора достижения компетенции**	**Результаты обучения по дисциплине**
Системное и критическое мышление	*УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач*	*УК-1.1* *Знает: методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического анализа и синтеза информации; основы системного подхода при решении поставленных задач.*	*Знать: принципы критического анализа и систематизации основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки*
		УК-1.2 *Умеет: получать новые знания на основе анализа и синтеза информации; собирать и обобщать данные по научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск информации и применять системный подход для решения поставленных задач; определять и оценивать практические последствия возможных решений задачи.*	*<u>Уметь:</u> самостоятельно получать, обобщать и использовать информацию , связанную с дифференциальными уравнениями различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.*
		УК-1.3 *Владеет: навыками исследования проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявления научных проблем и использования адекватных методов для их решения; формулирования оценочных суждений при решении*	*<u>Владеть:</u> способностью выявлять научные проблемы, соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.*

[1] Указывается только для УК и ОПК (при наличии).

		профессиональных задач.	
	ОПК–1 *Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности*;	*ОПК–1.1* *<u>Знать</u> принципы использования основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнения; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки*	*Знать: принципы использования основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки*
		ОПК–1.2 *<u>Уметь:</u> использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.*	*<u>Уметь:</u> использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.*
		ОПК–1.3 *<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.*	*<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.*

2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы .

Дисциплина «Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление» является базовой дисциплиной в цикле Б1 Дисциплины (модули). Она изучается на 2 курсе в 3 семестре и 4 семестрах.

Целями освоения дисциплины (модуля) «Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление» являются:

-сформировать у будущих специалистов современные теоретические знания в области теории линейных интегральных операторов и линейных функционалов, практические навыки в решении и исследовании основных типов уравнений и краевых задач, связанных с ними,

-ознакомить студентов с соответствующими приложениями этой теории в математической физике.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление» логически и содержательно-методически тесно связана с такими дисциплинами, как и «Линейные и нелинейные уравнения физики». Процесс изучения дисциплины опирается на знания, полученные при изучении курсов «Математического анализа» и «Линейной алгебры». Знания, полученные в результате освоения курса «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационное исчисление» позволяют применять соответствующие методы при решении задач «Линейных и нелинейных уравнений физики» и «Интегральных уравнений и вариационного исчисления»

Изучение дисциплины является одним из необходимых элементов подготовки специалистов по данному направлению.

Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «линейная алгебра». Освоение дисциплины «Дифференциальных уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление» необходимо при последующем изучении дисциплин «Уравнения в частных производных» «Дифференциальная геометрия и топология» и ряда других.

3.Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в *Приложение № 1*.

4.Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции **ОПК-1** способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности способность владеть

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	**Критерии оценивания результатов обучения**			
		2 «Не удовлетворительно»	3 «Удовлетворительно»	4 «Хорошо»	5 «Отлично»
УК-1.1 Знает: методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического	*Знать: принципы критического анализа и систематизации основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального*	Имеет частичные знания об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений.	В целом знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений. Интегральны	Знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и	Знает об основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и

анализа и синтеза информации; основы системного подхода при решении поставленных задач.	*уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки*	Интегральных уравнений и вариационного исчисления»	х уравнений и вариационного исчисления	вариационного исчисления, но допускает незначительные ошибки.	вариационного исчисления».
УК-1.2 *Умеет: получать новые знания на основе анализа и синтеза информации; собирать и обобщать данные по научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск информации и применять системный подход для решения поставленных задач; определять и оценивать практические последствия возможных решений задачи.*	*<u>Уметь:</u> самостоятельно получать, обобщать и использовать информацию , связанную с дифференциальными уравнениями различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.*	Не показывает сформированные умения в решении задач по дисциплине «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач.	Умеет частично Решать задачи по дисциплине «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач. Не в полной мере применяет физические законы для решения задач	Умеет частично Решать задачи по дисциплине «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач. Не в полной мере применяет физические законы для решения задач	Успешное и систематическое применение методов решения задач «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Анализирует и применяет физические законы для решения задач.
УК-1.3 *Владеет: навыками исследования проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявления научных проблем и использования адекватных методов для их решения; формулирования оценочных суждений при решении профессиональных задач.*	*<u>Владеть:</u> способностью выявлять научные проблемы, соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.*	Фрагментарно владеет навыкам и методами «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» .	В целом успешное, но не систематически применяет навыки и методами «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков и методов «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	Владеет в полной мере методами «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».
ОПК–1.1 *<u>Знать</u> принципы использования*	<u>Знать:</u> принципы использования основных понятий дифференциального	Имеет частичные знания об	В целом знает об основных	Знает об основных понятиях и	Знает об основных понятиях и

основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки	уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки.	основных понятиях и законах «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления»	понятиях и законах «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	законах «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления», но допускает незначительные ошибки.	законах «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».
ОПК–1.2 *<u>Уметь:</u> использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.*	<u>Уметь:</u> использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.	Не показывает сформированные умения в решении задач по дисциплине «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач.	Умеет частично Решать задачи по дисциплине «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач. Не в полной мере применяет физические законы для решения задач	Умеет частично Решать задачи по дисциплине «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления» Не умеет анализировать и применять физические законы для решения задач. Не в полной мере применяет физические законы для решения задач	Успешное и систематическое применение методов решения задач «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления». Анализирует и применяет физические законы для решения задач.
ОПК–1.3 *Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.*	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.	Фрагментарно владеет навыкам и методами «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	В целом успешное, но не систематически применяет навыки и методами «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков и методов «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».	Владеет в полной мере методами «Дифференциальных уравнений. Интегральных уравнений и вариационного исчисления».

Показатели сформированности компетенции:

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для экзамена:* текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10). Шкалы оценивания:

(*для экзамена:*

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	**Результаты обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
УК-1.1 *Знает: методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического анализа и синтеза информации; основы системного подхода при решении поставленных задач*	*Знать: принципы критического анализа и систематизации основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки*	Контрольная работа №1. Тест № 1.
ОПК–1.2 *<u>Уметь:</u> использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных*	*<u>Уметь:</u> самостоятельно получать, обобщать и использовать информацию , связанную с дифференциальными уравнениями различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами.*	Контрольная работа №2. Тест № 2.

уравнении различными методами.		
УК-1.3 *Владеет: навыками исследования проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявления научных проблем и использования адекватных методов для их решения; формулирования оценочных суждений при решении профессиональных задач.*	*Владеть: способностью выявлять научные проблемы, соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации.*	Контрольная работа № 3 Тест №3 Экзамен
ОПК–1.1 *Знать принципы использования основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки*	Знать: принципы использования основных понятий дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений; общего решения и частного решения дифференциального уравнении; задачи Коши; краевой задачи; их корректной математической постановки. : понятие интегрального уравнения, классификация; задача Абеля; существование и единственность решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 2 го рода; понятие резольвенты; уравнение Фредгольма с вырожденным ядром; характеристические числа и собственные функции, их свойства; вполне непрерывные операторы; оператор Фредгольма; альтернатива Фредгольма; уравнения Фредгольма с симметричным ядром; теорема о конечно спектре; теорема Гильбарта- Шмидта; понятие линейного функционала; вариация функционала; понятия близости кривых n – го порядка; сильного и слабого экстремума функционала; вариационной задачи с различного вида границами.	Контрольная работа №1. Тест № 1.
ОПК–1.2 *Уметь: использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными*	Уметь: использовать информационный математический аппарат на основе дифференциальных уравнений различного порядка; для математической постановки задач физики; решения краевых задачи; решения систем линейных обыкновенных дифференциальных различными методами; исследования устойчивости по Ляпунову решения систем дифференциальных уравнении различными методами. решать уравнения Вольтерра 2 го рода сведением к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; решать уравнения Вольтерра и Фредгольма 2 –го рода методом последовательных приближений и методом итерированных ядер; решать уравнения Фредгольма с вырожденным ядром с помощью определителей Фредгольма; решать уравнения Фредгольма с симметричным ядром, используя задачу Штурма- Лиувилля; находить вариацию	Контрольная работа №2. Тест № 2.

методами.	линейного функционала; исследовать на наличие сильного и слабого экстремума функционалы; решать вариационную задачу с различного вида границами.	
ОПК–1.3 Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	<u>Владеть:</u> способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач для выработки в последующем понимания ключевых аспектов и концепций в области их специализации; способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач с целью в последующем построения качественных и количественных моделей объектов и процессов в естественнонаучной сфере деятельности.	Контрольная работа № 3 Тест №3 Экзамен

Текущая, промежуточная и итоговая аттестация проводится по модульно-рейтинговой системе согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов.

Текущий контроль – это контроль над всеми видами аудиторной и внеаудиторной работы студентов по данному дисциплинарному модулю, результаты которой оцениваются до рубежного контроля.

Текущий контроль по теоретическому материалу модуля (лекционному и материалу самостоятельного изучения) проводится в форме тестового опроса или в виде письменного блиц-опроса по вопросам, требующим краткого ответа. Это основные определения, вопросы на понимание алгоритмов. Каждый вопрос оценивается как часть от максимального балла, назначенного на данный текущий контроль. В зависимости от объема модуля проводится 1-2 текущих контроля.

Рубежный контроль – проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом.

Рубежный контроль проводится в форме тестового опроса или в виде письменного блиц-опроса по 5 вопросам, требующим краткого ответа. Каждый вопрос оценивается как часть от максимального балла, назначенного на рубежный контроль. Вопросы охватывают материал целого модуля и также включают темы лекционных занятий и самостоятельной работы. А так же в виде итоговой контрольной работы.

По результатам суммарного текущего контроля по всем видам учебной деятельности и рубежного контроля выставляется промежуточный контроль.

Итоговый контроль – форма контроля, проводимая по завершении изучения дисциплины в семестре.

Итоговый контроль проводится в форме экзамена по теоретическому и практическому материалам.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

(3 семестр)

Дифференциальные уравнения первого порядка, общее решение и начальные условия. Задача Коши.

1. Проверьте, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции:

1) $xy' = 2y, y = 5x^2$;

2) $y'' = x^2 + y^2, y = \frac{1}{x}$;

2. Составьте дифференциальные уравнения заданных семейств кривых:

1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$; $x^2 + y^2 = C$;

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения.

Найдите общие или частные решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 2) $xyy' = 1 - x^2$; 3) $y' = -ysinx$;

4)$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$; 5) $(x + 2y)dx - xdx = 0$, 6) $y'=\frac{x+y}{x-y}$;

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

Найдите общие решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $xy' - 2y = x^3cosx$; 2) $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$; 3) $y' + yctgx = \frac{1}{cosx}$;

4) $xy' + y = y^2lnx$; 5) $2xcos^2ydy + (2y - xsin2y)dy = 0$;

Дифференциальные уравнения второго порядка, их общие решения и начальные условия. Задача Коши. Понижение порядка дифференциального уравнения.

Найдите общие или частные решения следующих дифференциальных уравнений:

1)$2y'' + x^3 = -1$;

2)$y''' = sinx + cosx, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$;

3) $y'' = lnx$.

Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найдите общие или частные решения дифференциальных уравнений 2-го порядка:

1)$y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

3)$y'' - 2y' - 3y = 0$; 4)$y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найдите общие или частные решения дифференциальных уравнений 2-го порядка:

1)$y'' + 4y' + 5y = x^2 + 3x - 1, y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y'' + 3y' = xe^x$;

3) $y'' + 2y' + y = sinx$;

4) $y'' - 3y' + 2y = cosx; y(0) = 0;\ y'(0) = 1$.

<u>Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.</u>

Решите следующие системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} + y + 3z = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x \\ \frac{dz}{dx} - y - z = x \end{cases}$; $y(0) = 0, z(0) = 0$.

Простейшие дифференциальные уравнения в частных производных. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных. Типы уравнений второго порядка в частных производных.

1.Найдите функцию z=z(x,y), удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{dx} = 1.$$

2.Решите уравнение: $\frac{d^2x}{dy^2} = 6y$, где $z = z(x, y)$;

3.Найдите общий интеграл уравнения:

1) $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = z$; 2)$(x^2 + y^2)\ \frac{dz}{dx} + 2xy\frac{dz}{dy} = 0$.

<u>Устойчивость по Ляпунову. Фазовые траектории.</u>

1. Исследовать на устойчивость решения следующих задач.

   a)$x' = 4x - t^3x, x(0) = 0$,

   b) $2tx' = x - x^3, x(0) = 0$.

2. Исследовать на устойчивость и на асимптотическую устойчивость тривиальное решение системы, общее решение которой имеет вид

   $x = C_1 sin^2 t - \ C_2 e^{-t}$,

   $y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2$.

3. Исследовать на устойчивость тривиальное решение следующих автономных систем уравнений:

   $a)x' = e^{x+2y} - cos3x, y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y,$

   $b)x' = tg(z - y) + 2x, y' = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, z' = -3y;$

4. Пользуясь функцией Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальные решения следующих систем:

   a) $x' = 2y^3 - x^5, y' = -x - y^3 + y^5$,
   b) $x' = y - 2x - (1 + t^2)x^3, y' = 6x - 4y$.

5. Исследовать расположение траекторий на фазовой плоскости и установить тип точки покоя:

   $a)x_1' = 3x_1 + 4x, x_2' = 2x_1 + x_2$.

$b)\ x_1' = 2x_1, x_2' = x_1 + x_2.$

$c)\ x_1' = x_1 - 2x_2, x_2' = 4x_1 - 3x_2.$

С П И С О К   В О П Р О С О В.
(3 семестр)

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общие понятия. (Общее и частное решение, задача Коши, геометрический смысл.)
2. Уравнение с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения приводящиеся к однородным.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной.
5. Уравнение Бернулли. Подстановка Бернулли. Уравнение Риккати.
6. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Линейные нормированные пространства. Принцип сжимающих отображений.
8. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.
9. Метод последовательных приближений.
10. Продолжение решения задачи Коши.
11. Уравнения не разрешенные относительно производной. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши.
12. Уравнения Клеро и Лагранжа.
13. Особые решения.
14. Огибающая однопараметрического семейства кривых.
15. Уравнения n-го порядка. Общее решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
16. Некоторые интегрируемые типы дифференциальных уравнений n-го порядка. Уравнения допускающие понижения порядка.
17. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Теорема существования и единственности задачи Коши. Линейный оператор.
18. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Свойства решений.
19. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Необходимое условие зависимости системы функций. Определитель Вронского.
20. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
21. Структура общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Фундаментальная система решений.
22. Определение линейного однородного дифференциального уравнения по его фундаментальной системе. Формула Лиувилля- Остроградского.
23. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Случай простых действительных и комплексных корней.
24. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Случай кратных корней.
25. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Структура общего решения.
26. Метод вариации произвольных постоянных постоянных.
27. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Подбор частного решения под правую часть уравнения методом неопределенных коэффициентов.

28. Краевые задачи. Функция Грина. Задача о собственных значениях и собственных функциях.
29. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Общее решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности.
30. Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод исключения.
31. Метод интегрируемых комбинаций.
32. Системы линейных дифференциальных уравнений. Свойства решений. Структура общего решения однородной и неоднородной системы.
33. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.
34. Системы линейных неоднородных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.
35. Непрерывная зависимость решений от начальных данных.
36. Устойчивость по Ляпунову (определение устойчивости и асимптотической устойчивости).
37. Простейшие типы точек покоя. Фазовая плоскость. Фазовые траектории.
38. Устойчивость по первому приближению. Теорема Ляпунова.
39. Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова.

Контрольно-оценочные материалы.

Контрольная работа №1.

1. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$xy' - y = xtg\,\frac{y}{x}\ .$$

2. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$x^2y' + xy + 1 = 0\ .$$

3. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y' + 2y = y^2e^x\ .$$

4. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$xy'' - y' = x^2\ .$$

5. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$2yy'' = \left(y'\right)^2\ .$$

Критерии оценок в баллах:
Каждый решенный пункт 1-3оцениваестя в 2 балла, 4,5 в 3 балла, не решенный 0 баллов, максимальное количество баллов - 12.

Контрольная работа №2.

1. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \ .$$

2. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$9y'' - 6y' + y = 0 \ .$$

3. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' - 2y - 3y = 0 \ .$$

4. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \ .$$

5. Решить дифференциальное уравнение. Найти общее решение.

$$y'' - 2y' - 3y = \cos x \ .$$

Критерии оценок в баллах:
Каждый решенный пункт 1-3 оценивается в 2 балла, 4,5 в 3 балла, не решенный 0 баллов, максимальное количество баллов 12.

Контрольная работа № 3.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = x - 4y + 3e^{2t}, \quad x(1) = x_0, \\ \quad y' = -x + y, \quad y(1) = y_0. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость тривиальное решение автономной системы уравнений:

$x' = e^{x+y} - 1 + 2xy, y' = 2\sin x + y^2$;

5. Исследовать расположение траекторий на фазовой плоскости и установить тип точки покоя:

x’=2x-y, y’=x.

Критерии оценок в баллах:
Каждый решенный пункт 1,2 оценивается в 3 балла, пункт 3 в 6 баллов, 4,5 в 2 балла, не решенный 0 баллов, максимальное количество баллов – 16.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Тест рубежного контроля к модулю 1

1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое неизвестная функция входит
1) под знаком интеграла;
2) под знаком производной или дифференциала;
3) под знаком логарифма;
4) в неявном виде;

2. Решением дифференциального уравнения $F(x,y,y',\dots,y^n)=0$ называется функция $y=y(x)$ если она
1) удовлетворяет начальным условиям;
2) n раз дифференцируема на промежутке I;
3) монотонна на промежутке I;
4) обращает при подстановке уравнение в тождество;

3. Общим интегралом дифференциального уравнения $F(x,y,y',\dots,y^n)=0$ является семейство функций вида
1) $\varphi(x,y,c_1,\ \dots,c_n)=0$
2) $y=\varphi(x,c)$
3) $\varphi(x,y,c_1,c_2)=0$
4) $y=c_1\,\varphi(x)+c_2$

4. Задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, формулируют следующим образом (укажите правильные варианты ответа):
1) Найти решение *y(x)* такое, что $y(x_0)=y_0$;
2) Найти решение *y(x)* такое, что $y(x_0)=f(x_0,y_0)$;
3) Найти интегральную кривую, проходимую через заданную точку *(x_0, y_0);*
4) Найти семейство интегральных кривых вида $y=\varphi(x,c)$;

5. Для приближенного построения интегральных кривых используется метод
1) изотерм;
2) Эйлера;
3) неопределенных коэффициентов;
4) изоклин;

6. Уравнение семейства изоклин для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ имеет вид:
1) $y=kx$;
2) $x^2+y^2=k,\ \ k\geq 0$;
3) $y=kx+b$;
4) $y=kx^2$;

7. Выбрать решение дифференциального уравнения $(x+1)\,dy + xy\,dx = 0$ среди предложенных функций:
1) $y = (x+1)\,e^{-x}$
2) $y = (x+1)\,e^{x}$
3) $y = (x-1)\,e^{x}$
4) $y = (x-1)\,e^{-x}$
8. Уравнениями с разделяющимися переменными являются уравнения вида:
1) $f(y)\,dy = g(x)\,dx$
2) $y' = f(x,y)$
3) $y' = f(\frac{y}{x})$
4) $y' = g(x)\,p(y)$
9. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:
$y' = f(x,y)$
$f(x)dx = g(y)dy$
$ay' + by + c = 0$
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
10. К однородным дифференциальным уравнениям можно привести уравнения вида
$y' = f(x,y)$, если $f(kx,ky) = f(x,y)$
$y' = f(ax+bx+c)$, где a, b, c – постоянные числа
$P(x,y)dy + Q(x,y)dx = 0$, если $P(kx,ky) = k^n\,P(x,y)$, $Q(kx,ky) = k^n\,Q(x,y)$
$y' + p(x) = f(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0; 1$

Критерии оценок в баллах:
Каждый вопрос – 1 балл

Тест рубежного контроля к модулю 2

1. Указать верную замену для решения уравнения $y \cdot y'' = y^2 \cdot y' + (y')^2$
1) $y' = p(x), y'' = p'(x)$
2) $y' = p(y), y'' = p'_y \cdot p(y)$
3) $p = \dfrac{y}{x}$
4) $p = y \cdot y'$
5) верный ответ отсутствует

2. Указать уравнения, допускающие понижение порядка:
1) $y'' = 3x^2 + 5$
2) $y' = 2x + y$
3) $y'' - 3y' + 2y = e^x$
4) $y'' = y \cdot (y')^2$
5) $y'' + 3y' = 2x$
6) $y'' \cdot \mathrm{tg}x = y \cdot (y')^2$

3. Уравнение $x^2 y'' = (y')^2$ сводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка заменой:

1) $y' = p(x), y'' = p'(x)$
2) $y' = p(y), y'' = p'_y \cdot p(y)$
3) $p = \dfrac{y}{x}$
4) верный ответ отсутствует
5) $p = (y')^2$

4. Установить соответствие между дифференциальным уравнением 2-го порядка и типом дифференциального уравнения, полученного после понижения порядка:

1	$y'' = \dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x} + \dfrac{y'}{x}$	1	С разделяющими переменными
2	$y'' + y' \cdot \mathrm{tg} x = \sin 2x$	2	однородной
3	$y \cdot y'' + (y')^3 = (y')^2$	3	линейное
4		4	Уравнение Бернулли
		5	Уравнение в полных дифференциалах

6. Указать общее решение уравнения $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$:
1) $4C_1 y = 4 - (C_1 x + C_2)^2$
2) $C_1 y = 4 + (C_1 x + C_2)^2$
3) $4C_1 y = 4 + (C_1 x + C_2)^2$
4) верный ответ отсутствует
5) $C_1 y = 4 - (C_1 x + C_2)^2$

6. Указать линейные дифференциальные уравнения:
1) $y'' + 2y' + 3y = 4x$
2) $y \cdot y'' = (y')^2$
3) $2y \cdot (y')^3 + y'' = 0$
4) $x^2 y'' + 2xy' + y = 0$
5) $y'' = 9y$

7. Для нижеприведенных систем функций указать порядок увеличения значения соответствующего определителя Вронского $\Delta = W[y_1, y_2]$:

1 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$
2 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$
3 $y_1 = 2\cos x, y_2 = 2\sin x$
4 $y_1 = 2, y_2 = x - 2$

8. Среди приведенных систем указать задачу Коши:

1 $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y(1) = -1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y''' - 5y'' + 4y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

5 верный ответ отсутствует

9. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка

$9y''' - y' = 0$. Корнями его характеристического уравнения являются …

Укажите ответы:

λ_1=

λ_2=

λ_3=

10.По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения

$y'' + 25y = tg5x$ следует искать в виде …

Критерии оценок в баллах:
Каждый вопрос – 1 балл

Тест рубежного контроля к модулю 3

1. Фундаментальной системе решений $\{1, x, x^2\}$ соответствует дифференциальное уравнение:

1)$y''' = 0$;

2)$y''' - 3y'' + 2y' + y = 0$;

3)$y''' - 3y'' + 3y' + y = 0$;

4)$y''' + y'' + y' = 0$;

5) другой ответ

2. Общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -5x - 6y, \\ y' = 8x + 9y \end{cases}$$

1) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$;

2)$y = C_1e^t + C_2e^{3t}$;

3)$x = -C_1e^t - 3C_2e^{3t}; y = C_1e^t + 4C_2e^{3t}$;

4)$x = C_1e^t + C_2e^{3t}; y = C_3e^t + C_4e^{3t}$;

3. Определить устойчивость нулевого решения следующей системы

$$\begin{cases} x' = x^3 - y, \\ y' = x + y^3. \end{cases}$$

4. Исследовать особую точку $x = 0, y = 0$ системы

$x' = 2x, y' = x + y$

1) Узел

2) Седло

3) Фокус

4) Центр

5. Исследовать особую точку уравнения

$\frac{dx}{dt} = x - 2y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y;$

1) Узел

2) Седло

3) Фокус

4) Центр

6.Сформулировать теорему об общем решении линейной однородной системы

7. Что называется общим решением линейного неоднородного уравнения?

8. Сформулировать основные свойства детерминанта Вронского.

9. Дать определение фундаментальной матрицы.

10. Написать фундаментальную матрицу для системы $x' = y,\ y' = 0$.

Критерии оценок в баллах:
Каждый вопрос – 1 балл

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Структура экзаменационного билета:

1-8 вопросы тестовые (0-0,5 балла каждый), 9-13 практические (0-4 балла каждый), 14-16 теоретические (0-2 балла каждый).

Образец экзаменационного билета:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Экзаменационный билет №1
по курсу «*Дифференциальные уравнения*»

Определение дифференциального уравнения, общего и частного решения.
2.Уравнение семейства изоклин для дифференциального уравнения $dy/dx = y/x^2$ имеет вид: 1) $y = kx$, 2) $x^2 + y^2 = k, k \ge 0$, 3) $y = kx + b$, 4) $y = kx^2$.

3.Определить типы дифференциальных уравнений и привести соответствующие определения
1) $3xy' - 2y = x^3/y^2$, 2) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$, 3) 4) $xy' + y = \ln x$, 5) $y^2 + xy' = xyy'$, 6) $\left(2x^3 - x\cos y\right)dx + \left(2 + x\sin y\right)dy = 0$, 7) $y = xy' - x^2y'^3$.

4. Указать верную замену для решения уравнения $x = y'' + 1$

1) $y' = p(x), y'' = p'(x)$, 2) $y' = p(y), y'' = p'_y p(y)$, 3) $p = \frac{y}{x}$, 4) $p = y''$.

5. Указать уравнения, допускающие понижение порядка:

1) $y'' - 1 = 2x$, 2) $y' = tg(2x+1)$, 3) $xy'' - 2y' = 0$, 4) $y'' = y(y')^2$, 5) $y'' - 3y' + 2y = e^x$, 6) $y'' tgx = y(y')^2$.

6.Уравнение $yy'' = (y')^2$ сводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка заменой:1) $y' = p(x), y'' = p'(x)$, 2) $y' = p(y), y'' = p'_y p(y)$, 3) $p = \frac{y}{x}$, 4) $y = (y')^2$.

7.Указать линейные дифференциальные уравнения:

1) $y''^2 + 2y' + 3y = 4x$,2) $2xy'' = y'$,3) $2x(y')^3 + y'' = 0$,4) $x^2 y'' + 2xy' + y = 0$,5) $y'' = 9y$, 6) $4y'' - 4y' + y = 0$.

8. Среди данных систем указать задачу Коши

1) $\begin{cases} y'' - y\sin x = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'' - y\sin x = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y'' - y\sin x = 0, \\ y(0) = 1, y(1) = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y''' - y\sin x = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = xy' + y' - y'^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

9. Определить вид частного решения $L[y] = f(x)$:

1) $f(x) = 2x^2 + x, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$, 2) $f(x) = \sin 2x + \cos x, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, 3) $f(x) = xe^x, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

10. По методу вариации произвольных постоянных общее решение неоднородного уравнения $y'' + 25y = tg5x$ следует искать в виде …

11. Общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$\begin{cases} x' = -5x - 6y, \\ y' = 8x + 9y. \end{cases}$: а) $\begin{matrix} 1) x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ 2) y = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \end{matrix}$, б) $\begin{matrix} 1) x = -C_1 e^t - 3C_2 e^{3t} \\ 2) y = C_1 e^t + 4C_2 e^{3t} \end{matrix}$, в) $\begin{matrix} 1) x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ 2) y = C_3 e^t + C_4 e^{3t} \end{matrix}$

12. Определить устойчивость нулевого решения следующей системы $x' = \sin x + y, y' = x + y^3$

13. Исследовать особую точку $x = 0, y = 0$ системы $x' = 2x, y' = x + y$ на устойчивость (узел, седло, фокус, центр).

14. Сформулировать теорему об общем решении ЛОДУ (или для систем).

15. Что называется общим решением линейного неоднородного уравнения?

16. Фундаментальной системе решений $\{1, x, x^2\}$ соответствует дифференциальное уравнение:

1) $y''' = 0$, 2) $y''' - 3y'' + 2y' + y = 0$, 3) $y''' - 3y'' + 3y' + y = 0$, 4) $y''' + y'' + y' = 0$

Зав. кафедрой Юмагулов М.Г. /________/

Критерии оценок в баллах

1-8 вопросы тестовые (0-0,5 балла каждый), 9-13 практические (0-4 балла каждый), 14-16 теоретические (0-2 балла каждый).

10-14 баллов – «удовлетворительно»

15-19 баллов – «хорошо»

20-30 баллов – «отлично»

Критерии оценки итогового контроля

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:
- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Общие критерии оценки итогового контроля

Студент получает баллы за экзамен согласно бально-рейтинговой системе. Итоговый контроль оценивается максимально в 30 баллов, если студент отвечает правильно на 16 из 16 предложенных вопросов.

Устанавливается следующая градация перевода оценки из многобалльной в четырехбалльную:

Экзамены:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- хорошо – от 60 до 79 баллов,
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов,
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

В случае, если студент сдает какое-либо из контрольных мероприятий позже установленного срока, преподаватель может снизить максимально возможное количество баллов за данный вид контроля на 5% за каждую неделю просрочки.

Посещение лекционных и практических (семинарских, лабораторных) занятий оценивается в суммах до 6 и 10 баллов соответственно, однако эти баллы являются штрафными и вычитаются преподавателем из набранных студентами баллов в ходе текущего и рубежного контроля по следующей схеме:

– за пропуски лекционных занятий

за 25 % пропусков вычитается 1 балл

за 50 % пропусков вычитается 4 балла

за 75 % пропусков вычитается 6 баллов

за 100 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний

– за пропуски практических (семинарских, лабораторных) занятий

за 20 % пропусков вычитается 2 балла

за 40 % пропусков вычитается 5 баллов

за 50 % пропусков вычитается 7 баллов

за 75 % пропусков вычитается 10 баллов

более 75 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний.

Студент, набравший по итогам текущего и рубежного контроля менее 35 возможных баллов или пропустивший более 75 % практических (семинарских, лабораторных) занятий, до экзамена по данной дисциплине не допускается. В этом случае, он изучает неосвоенные им темы, выполняет соответствующие задания на платной основе в сроки, установленные деканатом для ликвидации задолженностей. Баллы, полученные таким образом, прибавляются к количеству баллов, набранных студентом в семестре.

СПИСОК ВОПРОСОВ.

(4 семестр)

1. Интегральные уравнения, определение. Классификация. Линейные интегральные уравнения.
2. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Задача Абеля. Задача о колебаниях струны.
3. Уравнения Вольтерра 2-го рода. Связь с дифференциальными уравнениями. Метод последовательных приближений. Решение с помощью резольвенты методом итерированных ядер.
4. Метод последовательных приближений и итерированных ядер для уравнения Фредгольма 2-го рода.
5. Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения. Определитель Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
6. Элементы функционального анализа. Вполне непрерывные операторы в гильбертовых пространствах. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром. Свойства собственных функций и характеристических чисел. Теорема о конечном спектре. Теорема Гильберта-Шмидта. Разложение резольвенты по собственным функциям ядра. Разложение итерированных ядер в ряд по собственным функциям.
7. Линейный функционал. Вариация линейного функционала. Понятие близости кривых к-го порядка. Сильный и слабый экстремум функционала. Необходимое и достаточное условие. Уравнение Эйлера, экстремали.
8. Простейшая вариационная задача.

Контрольно-оценочные материалы.

Контрольная работа № 1. Интегральные уравнения

1.Решить интегральное уравнение, сведя его к дифференциальному

$$y(x) = e^x + \int_0^x (-2x + 2t + 3)\, y(t)\, dt$$

2.Методом последовательных приближений решить

$$y(x) = x - \int_0^x (x - t)\, y(t)\, dt \qquad y_0(x) = 0$$

3.Методом итерированных ядер построить резольвенту и выписать решение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x+t} y(t)\, dt$$

4.Решить уравнение с вырожденным ядром для любых значений параметра

$$y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x + t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x$$

Критерии оценки

Каждое задание по 5 баллов, всего 20 баллов.

Контрольная работа № 2. Вариационное исчисление

1. Найти вариацию функционала

$$V[y] = \int_a^b (x + y)dx;$$

2. Найти экстремали функционала

$V[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2)dx$ с условиями $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Критерии оценки

Каждое задание по 5 баллов, всего 10 баллов.

Домашняя контрольная №1

1. Дано интегральное уравнение Фредгольма II-го рода:

$$\phi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} [(a_1x^2 + b_1x)y^2 + c_1y^2 + (d_1x + e_1)y]\phi(y)dy + f(x).$$

A) Решить уравнение в случае, если $f(x) = f_1x^2 + g_1x + r_1$;
B) Найти собственные функции и собственные значения ядра;
C) Найти резольвенту, дать решение уравнения для произвольной функции $f(x)$ через резольвенту.

2. Дано интегральное уравнение Вольтерра II-го рода:

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x [a_2x + b_2y + c_2]\phi(x)dy + f(x)$$

A) Найти точное решение интегрального уравнения в случае $f(x) = d_2x^2 + c_2x + f_2$.

B) Построить 3 последовательных приближения для решения уравнения.

C) Найти выражение для резольвенты и написать решение для произвольной функции $f(x)$ через резольвенту.

3. Дано интегральное уравнение Фредгольма II-го рода с симметричным ядром:

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{b_3} K(x,y)\phi(y)dy,$$

где

$$K(x,y) = \begin{cases} (a_3 + x)(b_3 - y), 0 \le x \le y \le b_3 \\ (a_3 + y)(b_3 - x), 0 \le y \le x \le b_3 \end{cases}$$

A) Найти собственные значения и собственные функции ядра

B) Найти собственные значения и собственные функции для n-й итерации ядра.

Критерии оценки

Каждое задание по 5 баллов, всего 15 баллов.

Домашняя контрольная №2

Дан функционал:

$J[y(x)] = \int_0^2 [a_1\, y'^2 + a_2 yy' - 9a_1 y^2 + a_1 c_1 y(x^2 + d_1 x)]dx.$ *(1)*

1. Проверить линейность функционала (1). Обосновать ответ.
2. Найти приращение функционала (1).
3. Найти вариацию функционала (1) по первому и второму определениям.
4. Решить вариационную задачу с закрепленными границами для функционала (1) при условиях $y(0) = b_1, y(2) = b_2$.
5. Решить вариационную задачу с одним закрепленным концом для функционала (1) при условиях $y(2) = b_1$, первый конец перемещается по прямой $x = 0$.

*значения констант $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, f_1, d_1$ приведены в таблице для расчетной работы №1.

*номер варианта сохраняется с расчетной работы №1.

Критерии оценки

Каждое задание по 5 баллов, всего 25 баллов.

Таблица выбора констант для расчетной работы №1

№ вар		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
a1	1	10	15	5	-5	-10	7,5	-7,5	3	-3	-3	20	-20	25	-25	15	6	9	-9
b1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c1	1	-10	-15	-5	5	10	-7,5	7,5	-3	3	3	-20	20	-25	25	-15	-6	-9	9
d1	2	-10	-14	-4	6	11	-7	9	-2	4	4	-19	21	-24	26	-14	-5	-8	10
e1	2	1	1	-2	2	0	1	0	2	0	1	0	-2	-1	0	1	2	-1	0
f1	**0**	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g1	0	0	2	1	3	4	2	1	-1	-3	-2	-1	0	-1	-2	1	2	3	4
r1	1	1	0	1	2	5	0	1	2	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
a2	**1**	-9	4	1	-1	-4	9	2	4	1,5	2	1	-1	-9	4	1	-1	-4	9
b2	-1	9	-4	-1	1	4	-9	-2	-4	-1,5	-2	-1	1	9	-4	-1	1	4	-9
c2		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d2		2	-1	1	-1	-2	-3	2	3	1	5	-2	2	1	4	5	6	-4	0
e2		3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
f2		0	0	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
a3		-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	2
b3		2	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5
n		4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	9	3	4	5	6	7	8	9

ТЕСТОВОЕ ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ

1. Уравнение $y(x) = \lambda \int_0^x (-2x + 2t + 3)\, y(t)\, dt + e^x$ является уравнением

    A) Фредгольма 2-го рода

    B) Вольтерра 1-го рода

    C) Фредгольма 1-го рода

    D) Вольтерра 2-го рода

2. Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком

    A) Дифференциала

    B) Производной

    C) Интеграла

    D) Суммы

3. Характеристическими числами ядра $K(x,t)$ называются значения параметра λ при которых

A) Неоднородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt+f(x)$ имеет только нулевые решения

B) Неоднородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt+f(x)$ имеет ненулевые решения

C) однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt$ имеет ненулевые решения

D) однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt$ имеет только нулевые решения

4. Интегральное уравнение $y(x)=\int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt+e^x$ имеет решение

A) $y(x)=e^{2x}$

B) $y(x)=xe^{x^2/3}$

C) $y(x)=e^{-x}\left(x^2/2\right)+1$

D) $y(x)=e^x+1$

5. Уравнение $y(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} y(t)\,dt+\sin x$ является уравнением

A) Фредгольма 2-го рода

B) Вольтерра 1-го рода

C) Фредгольма 1-го рода

D) Вольтерра 2-го рода

6. Формулы $y_0=f(x)$, $y_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt, n=\quad$, $y(x)=\lim\limits_{x\to\infty} y_n(x)$ описывают метод

A) Последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2-го рода

B) Последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода

C) Итерированных ядер для уравнений Фредгольма 2-го рода

D) Итерированных ядер для уравнений Вольтерра 2-го рода

7. Собственная функция $y(x)=(1+2x)$ является решением уравнения

A) $y(x)-\lambda\int_0^1 (1+2x)\,ty(t)\,dt=0$

B) $y(x)-\lambda\int_0^x (1+2x)\,ty(t)\,dt=\sin x$

C) $y(x)-\lambda\int_0^x (1+2x)\,ty(t)\,dt=0$

D) $y(x)-\lambda\int_0^{\pi}(1+2x)ty(t)dt=\sin x$

8. Ядро $K(x,t)=t\sin x+x^2t^3$

A) Симметричное,

B) Ортогональное,

C) Вырожденное,

D) Сингулярное.

9. Собственными функциями ядра $K(x,t)$ называются

A) Нулевые решения $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$.

B) Ненулевые решения $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$.

C) Нулевые решения $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt$.

D) Ненулевые решения $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt$.

10. Неоднородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$, (где $K(x,t)$ - непрерывное, вырожденное, вещественное ядро) имеет бесконечно много решений или не имеет ни одного

A) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt$ имеет только нулевое решение;

B) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt$ имеет ненулевое решение;

C) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt$ не имеет решений;

D) Тогда и только тогда, когда сопряженное однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(t,x)y(t)dt$ имеет только нулевое решение;

11. Ядро $K(x,t)=\begin{cases} t(x+1), 0\le x\le t\le 1, \\ (t+1)x, 0\le t\le x\le 1. \end{cases}$

A) Симметричное,

B) Ортогональное,

C) Вырожденное,

D) Сингулярное.

12. Уравнение $\int_0^1 e^{x-t} y(t)\,dt = e^x$ является интегральным уравнением

A) Неоднородным Фредгольма 1-го рода

B) Однородным Вольтерра 1-го рода

C) Неоднородным Фредгольма 2-го рода

D) Неоднородным Вольтерра 1-го рода

13. Характеристические числа интегрального оператора Фредгольма с непрерывным, симметричным, вырожденным, неравным тождественно нулю ядром могут образовывать последовательность

A) $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} \lambda_n = \infty$;

B) $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n|$;

C) $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_n| \ge \ldots$;

D) $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$.

14. Для ядра $K(x,t) = xt$ уравнения $y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xty(t)\,dt$ повторными будут ядра

A) $K_1(x,t) = x, K_2(x,t) = \dfrac{x}{3}, K_3(x,t) = \dfrac{x}{9}, \ldots K_n(x,t) = \dfrac{x}{3^{n-1}}$;

B) $K_1(x,t) = xt, K_2(x,t) = \dfrac{xt}{3}, K_3(x,t) = \dfrac{xt}{9}, \ldots K_n(x,t) = \dfrac{xt}{3^{n-1}}$;

C) $K_1(x,t) = xt, K_2(x,t) = \dfrac{xt}{2}, K_3(x,t) = \dfrac{xt}{4}, \ldots K_n(x,t) = \dfrac{xt}{2^{n-1}}$;

D) $K_1(x,t) = t, K_2(x,t) = \dfrac{t}{3}, K_3(x,t) = \dfrac{t}{9}, \ldots K_n(x,t) = \dfrac{t}{3^{n-1}}$.

15. Собственные функции оператора Фредгольма, соответствующие различным характеристическим числам

A) Пропорциональны;

B) Линейно зависимы;

C) Ортогональны;

D) Комплексно сопряженные.

16. Неоднородное уравнение $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\,dt + f(x)$, (где $K(x,t)$ - непрерывное, вырожденное ядро) имеет единственное решение

A) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\,dt$ имеет только нулевое решение;

B) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\,dt$ имеет ненулевое решение;

C) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt$ не имеет решений;

D) Тогда и только тогда, когда однородное уравнение $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt$ имеет бесконечно много решений;

17. Уравнение $y(x)=\lambda\int_0^x (x+2t)\,y(t)\,dt$ является уравнением

A) Однородным Фредгольма 2-го рода
B) Однородным Вольтерра 1-го рода
C) Неоднородным Фредгольма 2-го рода
D) Однородным Вольтерра 2-го рода

18. Уравнение $y(x)=\lambda\int_0^x (x+2t)\,y(t)\,dt$ является

A) линейным уравнением Вольтерра;
B) нелинейным уравнением Фредгольма;
C) нелинейным уравнением Вольтерра;
D) линейным уравнением Фредгольма.

19. **Экстремалью** функционала называется кривая

A) интегральная для уравнения Эйлера
B) на которой достигается абсолютный экстремум функционала
C) на которой достигается относительный экстремум функционала
D) на которой вторая вариация функционала обращается в нуль

20. Установить соответствие. Если функционал $I(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx$ достигает экстремума на кривой $y_0(x)$, то она удовлетворяет уравнению

A) $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$, B) $\begin{cases} F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \\ F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0. \end{cases}$, C) $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$

D) $F'_y+\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$.

21. **Функционалом** называется отображение

A) – со значениями в R.

B) – определённое на пространстве функций со значениями в R.

C) – линейное.

D) – представимое в виде интеграла от переменной функции

22. Функция называется **допустимой** для функционала в вариационной задаче, если

A) – она входит в его естественную область определения.

B) – она входит в область его задания.
C) – её носитель компактен.
D) – она не является нулём функционала.

23. Вариацией функционала называется
A) линейная часть его приращения
B) нелинейная часть его приращения
C) квадрат его приращения
D) модуль его приращения

24. Функционал $F(y)$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ сильного максимума, если значения функционала $F(y)$ не больше $F(y_0)$ на любой близкой к $y = y_0(x)$
A) в смысле близости 0-го порядка;
B) в смысле близости 1-го порядка;

C) в смысле близости 2-го порядка;

D) в смысле близости 3-го порядка.

25. Выбери правильное утверждение необходимого условия экстремума функционала
A) Дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$, если при $y = y_0(x)$ вариация $\delta F = 0$.
B) Дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$, тогда и только тогда при $y = y_0(x)$ вариация $\delta F = 0$.
C) Если дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$, то при $y = y_0(x)$ вариация $\delta F = 0$.
D) Когда вариация $\delta F = 0$ при $y = y_0(x)$, тогда дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$.

26. Простейшая задача вариационного исчисления ставится так
A) среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную ($y(x) \in C^1[a,b]$) и удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $F(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$.

B) среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную ($y(x) \in C^1[a,b]$) и удовлетворяющих условиям $y(a) = A$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $F(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'')dx$.

C) среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную ($y(x) \in C^1[a,b]$) и удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $F(y) = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\,dx$.

D) среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную ($y(x) \in C^1[a,b]$), найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $F(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$.

27. Функционал $F(y)$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ слабого минимума, если значения функционала $F(y)$ не меньше $F(y_0)$ на любой близкой к $y = y_0(x)$

A) в смысле близости 0-го порядка;

B) в смысле близости 1-го порядка;

C) в смысле близости 2-го порядка;

D) в смысле близости 3-го порядка.

28. Установить соответствие. Если функционал $I(y) = \int_a^b f(x, y, z, y', z')dx$ достигает экстремума на кривой $y_0(x)$, то она удовлетворяет уравнению

A) $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$, B) $\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases}$, C) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$

D) $F'_y + \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$.

29. Уравнение $y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{y(t)+1}{y^2(t)} dt$ является

A) линейным уравнением Вольтерра;

B) нелинейным уравнением Фредгольма;

C) нелинейным уравнением Вольтерра;

D) линейным уравнением Фредгольма

30. Установить соответствие. Если функционал $I(y) = \int_a^b f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)dx$ достигает экстремума на кривой $y_0(x)$, то она удовлетворяет уравнению

A) $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$, B) $\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases}$, C) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$

D) $F'_y + \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$.

Критерии оценки
За каждое задание - 1 балл, всего 30 баллов.

Критерии оценки итогового контроля

Устанавливается следующая градация перевода оценки из многобалльной в четырехбалльную:

Зачеты:

- зачтено – от 60 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- не зачтено – от 0 до 59 баллов.

В случае, если студент сдает какое-либо из контрольных мероприятий позже установленного срока, преподаватель может снизить максимально возможное количество баллов за данный вид контроля на 5% за каждую неделю просрочки.

Посещение лекционных и практических (семинарских, лабораторных) занятий оценивается в суммах до 6 и 10 баллов соответственно, однако эти баллы являются штрафными и вычитаются преподавателем из набранных студентами баллов в ходе текущего и рубежного контроля по следующей схеме:

– за пропуски лекционных занятий

за 25 % пропусков вычитается 1 балл

за 50 % пропусков вычитается 4 балла

за 75 % пропусков вычитается 6 баллов

за 100 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний

– за пропуски практических (семинарских, лабораторных) занятий

за 20 % пропусков вычитается 2 балла

за 40 % пропусков вычитается 5 баллов

за 50 % пропусков вычитается 7 баллов

за 75 % пропусков вычитается 10 баллов

более 75 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний.

Студент, набравший по итогам текущего и рубежного контроля менее 60 возможных баллов или пропустивший более 75 % практических (семинарских, лабораторных) зачета не получает. В этом случае, он изучает неосвоенные им темы, выполняет соответствующие задания на платной основе в сроки, установленные деканатом для ликвидации задолженностей. Баллы, полученные таким образом, прибавляются к количеству баллов, набранных студентом в семестре.

4.3.Рейтинг–план дисциплины.

Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление.

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление_подготовки ***[03.03.02] Физика***

курс ___2__, семестр____3___

Виды учебной деятельности	Балл за конкретное	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный

студентов	задание			
Модуль 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка				
Текущий контроль			**0**	**12**
Контрольная работа №1	1)0-2 2)0-2 3)0-2 4)0-3 5)0-3	5	0	12
Рубежный контроль			**0**	**10**
Тест №1	0-1	10	0	10
Модуль 2. Дифференциальные уравнения высших порядков				
Текущий контроль			**0**	**12**
Контрольная работа №2	1)0-2 2)0-2 3)0-2 4)0-3 5)0-3	5	0	12
Рубежный контроль			**0**	**10**
Тест №2	0-1	10	0	10
Модуль 3. Системы дифференциальных уравнений. Устойчивость				
Текущий контроль			**0**	**16**
Контрольная работа №3	1)0-3 2)0-3 3)0-6 4)0-2 5)0-2	5	0	16
Рубежный контроль			**0**	**10**
Тест №3	1	10	0	10
Посещаемость				
Пропуски лекционных занятий			-6	0
Пропуски практических занятий			-10	0
Поощрительные баллы				
1. Своевременное выполнение заданий и активная работа у доски.			0	**10**
Итоговый контроль				
Экзамен			**35**	**110**

4.3.Рейтинг–план дисциплины.

Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

направление_подготовки ***[03.03.02] Физика***

курс ___2__, семестр____4___

Виды учебной	Балл за	Число	Баллы

деятельности студентов	конкретное задание	заданий за семестр		
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1. Интегральные уравнения.				
Текущий контроль			**0**	**15**
1. Контроль выполнения и проверка отчетности по домашней контрольной работе №1.	0-5	3	0	15
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. Контрольная работа №1	0-5	4	0	20
Модуль 2. Вариационное исчисление.				
Текущий контроль			**0**	**35**
1. Контроль выполнения и проверка отчетности по домашней расчетной работе №2	0-5	5	0	25
1. Контрольная работа №2	0-5	2	0	10
Рубежный контроль			**0**	**30**
2. Тест	0-1	30	0	30
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0
2. Посещение практических занятий			-10	0
Поощрительные баллы				
1. Своевременное выполнение заданий и активная работа у доски.			0	**10**
Итоговый контроль				
1. Зачет			60	**110**

5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,необходимых для освоения дисциплины

1. «Электронный читальный зал» (http://www.bashlib.ru/echitzal/).
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» (http://www.biblioclub.ru/)/ .
3. Издательство «Лань» (http://e.lanbook.com/) .
4. http://yagola.professorjournal.ru/integral_equation - лекции по интегральным уравнениям и вариационному исчислению
5. www.gpntb.ru/— Государственная публичная научно-техническая библиотека.
6. www.nlr.ru/ — Российская национальная библиотека.
7. www.nns.ru/ — Национальная электронная библиотека.
8. www.rsl.ru/— Российская государственная библиотека.

5.Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
(3 семестр)

В библиотеке Башкирского государственного университета имеются в наличии следующие издания:

Основная литература:

1. Юмагулов, М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения : теория и приложения [Электронный ресурс] / М.Г. Юмагулов. — Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:https://elib.bashedu.ru/dl/read/Yumagulov_Obeknoven.differ.uravneniya_Uchebnik_2008.pdf
2. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В.А. Треногин. - Москва : Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82614
3. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. - б.м. : б.и., б.г.. - 425 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165
4. Егоров, А.И. Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.И. Егоров. - Москва : Физматлит, 2013. - 108 с. : ил. - Библиогр.: с. 105. - ISBN 978-5-9221-1489-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275303

Дополнительная литература:

5. Рыбаков, К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Практический курс : учебное пособие / К.А. Рыбаков, А.С. Якимова, А.В. Пантелеев. - Москва : Логос, 2010. - 384 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-465-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84753
6. Гайдамак О.Г., Султанаев Я.Т. Дифференциальные уравнения. : Курс лекций /РИО Башкирского ун-та. – Уфа, 2002.-121с. – аб.2. 80экз.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2000. – аб2., 35 экз.
8. Егоров, А.И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений / А.И. Егоров. - Москва : Физматлит, 2008. - 254 с. - ISBN 978-5-9221-0942-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68444

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины
(4 семестр)

1. «Электронная библиотека БашГУ» http://www.bashlib.ru/echitzal/
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» http://www.bashlib.ru/echitzal/
3. ЭБС «ЛАНЬ» http://www.bashlib.ru/echitzal/

В библиотеке Башкирского государственного университета имеются в наличии следующие издания:

Основная литература:

1. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения : учебное пособие / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. - Москва : Физматлит, 2003. - 78 с. - ISBN 5-9221-0275-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68122
2. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов. - Москва : Физматлит, 2005. - 214 с. - ISBN 5-9221-0628-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68123
3. Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. Петровский. - 3-е изд., испр. - Москва : Изд-во "Наука", 1965. - 126 с. - ISBN 978-5-4458-5092-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222214

Дополнительная литература:

4. Сборник задач по уравнениям математической физики : учебное пособие / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова и др. - 3-е изд., исправл. - Москва : Физматлит, 2001. - 287 с. - ISBN 5-9221-0072-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68127
5. Интегральные уравнения и вариационное исчисление [Электронный ресурс]: учеб. пособие / БашГУ; сост.: Э. А. Назирова, А. Н. Кучкарова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:**https://elib.bashedu.ru/dl/read/NazirovaIntegr.Uravnen. i variant.Ischesl.UchPos.2012.pdf**>.
6. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. - б.м. : б.и., б.г.. - 425 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165
7. Жибер, А. В. Дифференциальные уравнения математической физики и методы их решения [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. В. Жибер, Г. З. Мухаметова, Н. А. Сидельникова; БашГУ. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — <URL:https://elib.bashedu.ru/dl/read/ZhiberDifUravnMetemFiziki.pdf>.

6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

(3 семестр)

Для проведения лекционных и практических занятий используется аудиторный фонд физико-технического института.

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
1	**2**	**3**
Большая физическая аудитория 02	Лекции	Доска, компьютер, мультимедийный проектор, экран Программное обеспечение: 1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 104 от 17.06.2013 г. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 114 от 12.11.2014 г.
учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа: аудитории № 322 или № 324 или № 318 (физмат корпус)	Практические занятия	Доска, мел, сборники задач, калькулятор
Читальный зал №1 (главный корпус, 1 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, ПК (моноблок) - 3 шт, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 76.
Читальный зал №2 (корпус физмата, 2 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 50.
Читальный зал №4 (корпус биофака, 4 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 60.

(4 семестр)

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
1	**2**	**3**

Большая физическая аудитория 02	Лекции	Доска, компьютер, мультимедийный проектор, экран Программное обеспечение: 1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 104 от 17.06.2013 г. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Лицензия OLP NL Academic Edition, бессрочная. Договор № 114 от 12.11.2014 г.
учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа: аудитории № 322 или № 324 или № 318 (физмат корпус)	Практические занятия	Доска, мел, сборники задач, калькулятор
Читальный зал №1 (главный корпус, 1 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, ПК (моноблок) - 3 шт, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 76.
Читальный зал №2 (корпус физмата, 2 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 50.
Читальный зал №4 (корпус биофака, 4 этаж)	Самостоятельная работа	Научный и учебный фонд, научная периодика, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 60.

Приложение № 1

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины ***Дифференциальные уравнения.Интегральные уравнения и вариационное исчисление.***
на 3 семестр

Очная
форма обучения

Вид работы	**Объем дисциплины**
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	73,2
лекций	36
практических/ семинарских	36
лабораторных	
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)(ФКР)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	43,8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	27

Форма контроля:
экзамен___3__ семестр

№ п.п.	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов (СРС)	Форма текущего контроля успеваемости
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Модуль 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка								
1	**Дифференциальные уравнения 1-го порядка.** Понятие дифференциального уравнения: поле направлений, решения; интегральные кривые, векторное поле; фазовые кривые. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: 1) уравнения с разделяющимися переменными, 2) однородные уравнения, 3)линейное уравнение, 4) уравнение Бернулли, Риккати, 5) уравнение в полных дифференциалах.	9	9		18	1,4,5, доп. 3,4	решение задач [5] №1-6, № 15, №16 (а, б), № 17-20, №30, № 33,№36, № 36, № 37-45;	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контр №1 Тест №1
Модуль 2. Дифференциальные уравнения высших порядков								
2	**Дифференциальные уравнения высших порядков:** 1) уравнения, допускающие понижение порядка; 2) линейные уравнения любого порядка; 3) краевые задачи; 4) функции Грина;	9	9		18	1,4,5, доп. 3,4	решение задач [5] №425, №426, №427, №428, №429, №455, №456, №457, №458, №463, №464,	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на

	5) теорема существования и единственности решения задачи Коши; 6) интервал существования решения линейного уравнения; 7) фундаментальная система решений; 8) определитель Вронского; 9) линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами; 10) общее решение линейного неоднородного уравнения; 11) метод вариации произвольных постоянных; 12) линейные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида.						№465, № 466, № 477, №481, №482, № 483, №241, №242, №243, №244, №245, №246, №251, №252, №253, №254, №255, №267, №268, №287, Решение задач №501, №502 №511, №512, №513, №514, №515, №516, №549, №550, №551, №552, № 575, №576, №577, №578, № 582, № 583, № 584.	занятиях, Контрольная работа №2 Тест №2
Модуль 3. Системы дифференциальных уравнений. Устойчивость.								
3	**Системы обыкновенных дифференциальных уравнений :** 1) нормальные системы; 2) автономные системы; 3) метод исключения; 4) первые интегралы; 5) фундаментальная система решений; 6) определитель Вронского; 7) формула Остроградского – Лиувилля; 8) линейные системы с постоянными коэффициентами; 9) общее решение линейной неоднородной системы	9	9		18	1,4,5, доп. 3,4	Решение задач: [5] №786, №787, №788, №789, №789, №790, №802, №803, №826, №828, № 829, №830, №846, №847,	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контрольная работа №3,

	уравнений; 10) метод вариации произвольных постоянных; 11) теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы любого порядка;						№848, №849	
4	**Устойчивость:** 1) уравнения в отклонениях; 2) определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости; 3) линейные уравнения в отклонениях; 4) функции Ляпунова; 5) достаточные условия асимптотической устойчивости; 6) устойчивость по первому приближению; 7) фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами; 8) особые точки: седло, узел, фокус, центр.	9	9		16,8	1,4,5, доп. 3,4	Решение задач; 5]№882, №883, №884, №885,№890,№891,№894, №899,№900, №907, №908, №914, №915, №916, №925, № 926, №932,№933, №934, №935	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, домашняя контрольная работа №3 Тест №3
	Всего часов:	**36**	**36**		**70,8**			

Примечание 1. Часы на самостоятельную работу включают время на подготовку к экзамену (контроль).
Примечание 2. В таблицу не включено 1.2 часа ФКР (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности во время семестра, подразумевающие контактную работу обучающихся с преподавателем).

Приложение № 1

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплины ***Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения и вариационное исчисление*** на 4 семестр

Очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	3/108
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	32,2
лекций	16
практических/ семинарских	16
лабораторных	
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)(ФКР)	0,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	75,8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	

№ п.п.	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов (СРС)	Форма текущего контроля успеваемости
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Модуль 1. Интегральные уравнения.								
1	Линейные операторы и их приложения в математической физике. Понятие интегрального уравнения. Линейные интегральные уравнения. Классификация. Задача Абеля. Уравнение Фредгольма как пример некорректно поставленной задачи. Метод регуляризации А.Н. Тихонова	2	2		4	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №1.	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях,
2	Уравнения Вольтера 2-го рода. Связь с дифференциальными уравнениями. Метод последовательных приближений, метод итерированных ядер для уравнений Вольтерра и Фредгольма 2- го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Метод определителей Фредгольма. Резольвента.	2	2		18	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №1.	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контр №1
3	Вполне непрерывные операторы. Интегральные уравнения Фредгольма с симметричными ядрами. Собственные значения и собственные функции и их свойства. Альтернатива Фредгольма. Теорема Гильберта-Шмидта. Функция Грина. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению.	4	4		18	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №1.	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях,

	Теорема о конечном спектре. Применение преобразований Лаплпаса и Фурье для решения уравнений							
Модуль 2. Вариационное исчисление.								
4	Элементы вариационного исчисления. Введение. Примеры, приводящие к постановке вариационных задач. Понятие функционала. Расстояние между кривыми. Приращение функционала. Вариация функционала.	4	4		18	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №2	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, домашняя контрольная работа №2.
5	Наибольшее значение функционала. Необходимые и достаточные условия наличия экстремума. Типы вариационных задач. Вывод уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи с закрепленными границами. Уравнение Остроградского	4	4		17,8	Осн.1-2, доп. 5-8	Решение домашней контрольной №2	Выполнение аудиторных и домашних заданий, опросы на занятиях, Контрольная работа 2,
	Всего часов:	**16**	**16**		**75,8**			

Примечание 1. В таблицу не включено 0.2 часа ФКР (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности во время семестра, подразумевающие контактную работу обучающихся с преподавателем).