

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 9 от «28» февраля 2022 г.

Зав. кафедрой  / Юмагулов М.Г.

Согласовано:

Председатель УМК  
факультета математики и  
информационных технологий

 / А.М. Ефимов

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Дифференциальные уравнения

(наименование дисциплины)

Блок Б1 Дисциплины (модули) обязательная

(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультатив))

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)

09.03.03 Прикладная информатика

(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки


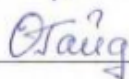
Информационные и вычислительные технологии

(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

бакалавр

(указывается квалификация)<sup>1</sup>

Разработчик (составитель) зав. каф., д.ф.-м.н., профессор	 / Юмагулов М.Г.
доцент, к.ф.-м.н.	 / Гайдамак О.Г.

Для приема: 2022

Уфа 2022

Рабочая программа дисциплины актуализирована на заседании кафедры дифференциальных уравнений протокол от «28»\_февраля\_2022 г. №\_9

Дополнения и изменения, внесённые в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры дифференциальных уравнений: обновлён фонд оценочных средств. протокол от «28»\_февраля\_2022 г. №\_9

Зав. кафедрой  / Юмагулов М.Г.

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	5
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	5
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	5
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	7
4.3. Рейтинг-план дисциплины	7
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	16
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	17
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	17

**1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций**

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
	ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Знать основные концепции дисциплины, основные теоремы и следствия, методы решения и анализа типовых задач
		ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Уметь применять в профессиональной деятельности методы и знания дифференциальных уравнений
		ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Владеть методикой использования основных теорем и методов дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 2 курсе в 3-4 семестрах.

Цель изучения дисциплины: основные понятия теории дифференциальных уравнений, основные типы дифференциальных уравнений и методы их интегрирования, применять общие методы к решению конкретных задач в математике и физике.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: математический анализ, алгебра и геометрия. Освоение дисциплины «Дифференциальные уравнения» необходимо при последующем изучении дисциплин «Теория вероятности и математическая статистика» и ряда других.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине.

#### Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции

ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетеоретические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов		
		«Не зачтено»	«За»	
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («
ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Знать основные концепции дисциплины, основные теоремы и следствия, методы решения и анализа типовых задач	Фрагментарные представления об основных концепциях дисциплины, основных теоремы и следствия, методах решения и анализа типовых задач	Неполные представления об основных концепциях дисциплины, основных теоремы и следствия, методах решения и анализа типовых задач	Сформировано содержание отдельных представлений об основных концепциях дисциплины, основных теоремы и следствия, методы решения

				типовые задачи
ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Уметь применять в профессиональной деятельности методы и знания дифференциальных уравнений	Фрагментарные умения применять в профессиональной деятельности методы и знания дифференциальных уравнений	В целом успешное, но не систематическое умение применять в профессиональной деятельности методы и знания дифференциальных уравнений	В успешном содержательном отделе умение применять профессиональные деятельности методы дифференциальных уравнений
ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Владеть методикой использования основных теорем и методов дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности	Фрагментарное владение методикой использования основных теорем и методов дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности	В целом успешное, но не систематическое применение методики использования основных теорем и методов дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности	В целом, но содержание отделе применения методики использования основных методов дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

#### 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания

**результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Знать основные концепции дисциплины, основные теоремы и следствия, методы решения и анализа типовых задач	Лабораторная работа, ргр, коллоквиум, зачет, экзамен
ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	Уметь применять в профессиональной деятельности методы и знания дифференциальных уравнений	Лабораторная работа, ргр, коллоквиум, зачет, экзамен
ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Владеть методикой использования основных теорем и методов дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности	Лабораторная работа, ргр, коллоквиум, зачет, экзамен

#### **4.3. Рейтинг-план дисциплины**

Рейтинг–план дисциплины представлен в приложении 2.

#### **Экзаменационные билеты**

Структура экзаменационного билета: 2 теоретических вопроса. Первый вопрос за 1 семестр, второй вопрос за 2 семестр.

Примерные вопросы для экзамена:

- 1. Понятие дифференциального уравнения и его решения. Интегральные кривые.** Понятие общего решения дифференциального уравнения.
- 2. Задача Коши. Теорема (Пеано) существования решения задачи Коши. Теорема (Пикара) существования и единственности решения задачи Коши.**
- 3. Дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Уравнения с разделяющимися переменными.** Однородные уравнения вида  $x' = f(x, t)$ . Уравнения в

полных дифференциалах вида  $P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$ . Линейные уравнения первого порядка вида  $x' = a(t)x + b(t)$ .

4. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка вида  $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$ . Фундаментальная система решений однородного линейного уравнения.
5. Общее решение однородного и неоднородного линейного уравнения  $n$ -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
6. Схема решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами  $x'' + ax' + bx = f(t)$ .
7. Функции от матриц и их вычисление. Экспонента матрицы  $e^{At}$ .
8. Линейные системы дифференциальных уравнений  $x' = A(t)x + f(t)$ . Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы  $x' = A(t)x$ .
9. Формула Коши общего решения однородной  $x' = Ax$  и неоднородной системы  $x' = Ax + f(t)$  дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
10. Формулы общего решения линейной однородной системы второго порядка  $x' = Ax$  (в терминах собственных значений и собственных векторов матрицы  $A$ ).
11. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Разрешимость краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
12. Задача об изгибе стержня.
13. Автономные уравнения и системы. Свойства автономных систем. Траектории автономных систем и их отличие от интегральных кривых.
14. Точки равновесия (особые точки) и периодические решения (циклы) автономных систем.
15. Фазовые пространства и фазовые портреты автономных систем. Фазовое поле скоростей.
16. Фазовые портреты автономных уравнений первого порядка.
17. Фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка  $x' = Ax$ . Классификация особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр.
18. Фазовые портреты нелинейных автономных систем второго порядка в окрестности особой точки. Линеаризованное уравнение.
19. Фазовый портрет математического маятника.
20. Понятие устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Асимптотическая устойчивость. Свойства устойчивости нулевого решения линейного уравнения  $x' = qx$  при  $q < 0$ ,  $q > 0$  и  $q = 0$ .
21. Признаки устойчивости нулевой точки равновесия линейных автономных систем  $x' = Ax$ .
22. Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем  $x' = f(x)$ .
23. Устойчивость точек равновесия математического маятника.
24. Устойчивые матрицы и многочлены. Теорема Стодола. Критерий Рауса-Гурвица.
25. Основы численных методов решения задачи Коши. Метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.
26. Понятие динамической системы. Примеры динамических систем: модель Мальтуса, модель Ферхюльста, модель «хищник-жертва», математический маятник, модель Лоренца. Точки равновесия этих систем и свойства устойчивости.

Образец экзаменационного билета:

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**



**Экзаменационный билет №1**  
**по курсу «Дифференциальные уравнения»**

1. **Понятие дифференциального уравнения и его решения. Интегральные кривые.**  
Понятие общего решения дифференциального уравнения.
2. **Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем  $x' = f(x)$ .**

Преподаватель Гайдамак О.Г. / \_\_\_\_\_ /

Зав. кафедрой Юмагулов М.Г. / \_\_\_\_\_ /

- Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:
- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
  - хорошо – от 60 до 79 баллов;
  - удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
  - неудовлетворительно – менее 45 баллов.

*Примерные критерии оценивания ответа на экзамене:*

**Критерии оценки (в баллах):**

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

*Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;*

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

**Примерные темы лабораторных и практических занятий**

**Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной**

- 1). Понятие дифференциального уравнения. Метод изоклин

- 2) Уравнения с разделяющимися переменными;
- 3) Геометрические и физические задачи
- 4) Однородные уравнения;
- 5) Уравнения в полных дифференциалах; интегрирующий множитель;
- 6) Линейное уравнение; уравнение Бернулли;

**Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной: :**

- 7) Метод введения параметра;
- 8) Уравнения Лагранжа и Клеро;
- 9) Теорема существования и единственности решения задачи Коши; особые решения.

**Дифференциальные уравнения высших порядков :**

- 10) Уравнения, допускающие понижение порядка;
- 11) Линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
- 12) Линейные уравнения с переменными коэффициентами
- 13) Краевые задачи; функции Грина;

**Системы обыкновенных дифференциальных уравнений :**

- 14) Линейные системы с постоянными коэффициентами;
- 15) Общее решение линейной неоднородной системы уравнений;

**Устойчивость :**

- 16) Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости; достаточные условия асимптотической устойчивости; устойчивость по первому приближению;
- 17) Особые точки: седло, узел, фокус, центр;
- 18) Фазовая плоскость

**Расчетно-графическая работа (РГР).**

**Описание РГР**

В каждом семестре студенту представляется две расчетно-графические работы (РГР). РГР №1 состоит из 12 заданий. РГР №2 состоит из 9 заданий.. При выполнении РГР студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Работа должна выполняться на листах формата А4; первой страницей является титульный лист, на котором указывается фамилия и имя студента, группа, номер варианта.
2. Решение задач следует приводить в порядке номеров, указанных в РГР. Перед решением каждой задачи необходимо полностью переписать ее условие.
3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на сведения из теории с указанием необходимых формул и теорем.
4. Решение задач геометрического содержания (фазовые портреты и т.п.) должно сопровождаться соответствующими рисунками.
5. Номера вариантов студент выбирает в соответствии с номером своей фамилии в списке группы

**РГР№1**

1. Проверить(подстановкой), является ли функция  $x = \frac{t^2 + t \ln(2t)}{t+1}$  решением данного дифференциального уравнения  $t(t+1)(x' - 1) = x$ . Если да, то указать область существования решения.
2. Методом изоклин приближенно начертить интегральные кривые уравнения  $y' = xy$  Найти общее решение

3. Для дифференциального уравнения  $x = \sqrt{|x-1|} \ln t + \ln x$ :- определить область существования решения задачи Коши(определяемую условиями теоремы Пикано); определить область существования решения задачи Коши(определяемую условиями теоремы Пикара);
4. Составить дифференциальное уравнение кривых, обладающих тем свойством, что отрезок касательной заключенной между осями координат имеет длину  $a$ .
5. За какое время вытекает половины воды из цилиндрического бака с диаметром основания 1 м и высотой 1 м через отверстие диаметром 2 см в дне? Ось цилиндра вертикальна, в начальный момент бак наполнен водой. Принять что вода из отверстия вытекает со скоростью, равной  $3h$  метр/сек, где  $h$  высота уровня воды над отверстием.
6. Найти общее решение уравнения  $(xy' - y) \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) = x$
7. Найти общее решение уравнения  $(x^2 - y^2 - 4x)dx - 2xydy = 0$
8. Решить задачу Коши  $x' + x = et, x(0) = 2$
9. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y = 2xy' - (y')^2$
10. Найти общее решение уравнения  $tx'' + x' = 2tx'$
11. .Выяснить, образуют ли данные функции  $\sin x, \cos x, \cos(x+1)$  линейно независимую систему
12. Показать, что функции  $t+2, t^2-1$  образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения второго порядка  $(t^2 + 4t + 1)x'' - 2(t+2)x' + 2x = 0$

### Критерий оценивания РГР №1

- 36 баллов выставляется студенту, если 12 задач решены верно;  
 33 балла выставляется студенту, если 11 задач решены верно;  
 30 баллов выставляется студенту, если 10 задач решены верно.  
 27 балла выставляется студенту, если 9 задач решены верно  
 24 баллов выставляется студенту, если 8 задач решены верно;  
 21 балла выставляется студенту, если 7 задач решены верно;  
 18 баллов выставляется студенту, если 6 задач решены верно.  
 15 балла выставляется студенту, если 5 задач решены верно  
 12 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;  
 9 балла выставляется студенту, если 3 задачи решены верно  
 6 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;  
 3 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно;

### РГР №2

1. Найти решение задачи Коши  $y'' + 2y' + y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 2$ .
2. Выяснить, имеет ли решение краевая задача  $y'' + 2y' + y = 1, y(0) = 0, y'(1) + y(1) = 0$
3. Решить уравнение  $x(x+2)y'' + (x+4)y' - y = 0$
4. Вычислить матричную экспоненту  $e^{At}$  и построить решение задачи Коши  $x' = Ax_0, x(0) = x_0$

5. Найти точки равновесия скалярных уравнений первого порядка  $x' = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ,  $1 + \sin 2x = x'$ , построить их фазовые портреты в фазовом пространстве и в расширенном фазовом пространстве.
6. Изобразить фазовые портреты линейных систем  $x' = A_k x$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ,  
 $A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
7. Применяя критерий Раусса-Гурвица выяснить, при каких значениях параметра  $a$  нулевое решение уравнения  $y^{(4)} + ay^{(3)} + 14y'' + 36y' + 45y = 0$  является асимптотически устойчивым
- 8.

8<sup>0</sup>. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x' = a(y - f(x)), \\ y' = x - y + z, \\ z' = -by, \end{cases}$$

где  $f(x) = (x^3 - x)/6$ ,  $a, b$  – положительные параметры. Найти точки равновесия системы, определить их характер устойчивости, привести соответствующие линеаризованные уравнения.

Варианты:

9. 1.  $a = 1$ ,  $b = 1$ .

9<sup>0</sup>. Перейти от дифференциального уравнения второго порядка  $y'' + f(y, y') + g(y) = 0$  к автономной системе  $x' = F(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^2$ ) на основе замены  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ . Найти точки равновесия полученной системы, определить их тип, выяснить характер ее устойчивости. Построить на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  траекторию решения  $x(t)$  полученной системы на промежутке  $0 \leq t \leq 20$ , соответствующей решению задачи Коши для дифференциального уравнения.

Варианты:

12

1.  $y'' - \frac{(1-y^2)y'}{2} + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 5$ .

### Критерий оценивания РГР №2

*Зачтено, если правильно решено не менее 8 заданий,*

*Незачтено, если решено менее 8 заданий.*

### Критерий оценивания РГР №2

18 баллов выставляется студенту, если 9 задач решены верно;

16 баллов выставляется студенту, если 8 задач решены верно;

14 баллов выставляется студенту, если 7 задач решены верно.

12 Баллов выставляется студенту, если 6 задач решены верно

10 баллов выставляется студенту, если 5 задач решены верно;

8 баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;

6 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно.

4 балла выставляется студенту, если 2 задачи решены верно

2 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно;

### Примерные варианты лабораторных работ

Описание лабораторных работ:

В каждом семестре студенту представляется две лабораторные работы. Каждая лабораторная работа состоит из 4-5 объемных заданий. Задача считается правильно решенной, если студентом приведено подробное и полное ее решение. Каждое задание лабораторных работ №1,2,3 оценивается в 5 баллов. Каждое задание лабораторной работы №4 оценивается в 4 балла.

#### Лабораторная работа № 1

1. Решить уравнение  $2(x\sqrt{y} + 1)udx = xdu$ ,
2. Решить уравнение  $(2xy^2 - 3y^3)dx + (y^3 - 3xy^2)dy = 0$
3. Решить уравнение  $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$
4. Решить уравнение  $xy' = e^y + 2y'$

#### Критерии оценки (в баллах)

20баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;

15 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

10 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно.

5 баллов выставляется студенту, если 1 задача решена верно.

#### Лабораторная работа № 2

1. Решить уравнение:  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ .
2. Решить уравнение:  $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$ .
3. Решить уравнение  $xuy'' - x(y')^2 + y'(y'+y)$ .
4. Решить уравнение  $x((y')^2 + e^2) = -2y'$ .

Описание методики оценивания:

#### Критерии оценки (в баллах)

20баллов выставляется студенту, если 4 задачи решены верно;

15 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

10 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно.

5 баллов выставляется студенту, если 1 задача решена верно.

#### Лабораторная работа № 3

1. Решить уравнение  $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ ,
2. Решить уравнение  $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$ ,
3. Решить уравнение  $y'' - 5y' = 2x - 3$ ,
4. Решить уравнение  $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0$ .

### Критерии оценки (в баллах)

20 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;

15 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

10 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;

5 баллов выставляется студенту, если 1 задачи решены верно.

### Лабораторная работа № 4

1. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 7e^{-3t} \\ \dot{y} = -4x - 4y \end{cases}.$$

2. Решить систему уравнений  $\begin{cases} x' = x + z - y, \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

3. Исследовать особые точки уравнения  $y' = \frac{-6x-5y}{x+3y}$

4. Исследовать на устойчивость:  $\begin{cases} x' = 1 + \ln(1 + 2x) - e^y \\ y' = 2x + tg(y) \end{cases}$

### Критерии оценки (в баллах)

16 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;

12 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

8 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;

4 баллов выставляется студенту, если 1 задача решена верно.

### Коллоквиум

Описание коллоквиума

Коллоквиум проводится в каждом семестре. Студенту предоставляется возможность ответить на один теоретический вопрос из списка вопросов к коллоквиуму.

### Вопросы для коллоквиума №1

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Примеры.
2. Понятие дифференциального уравнения. Решение д. у. Основные виды д. у. : уравнение n-го порядка, уравнение первого порядка, уравнение относительно дифференциалов.
3. Геометрическая интерпретация решений д. у. : интегральные кривые, поле направлений, изоклины, метод изоклин приближенного построения интегральных кривых.
4. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решение задачи Коши.
5. Теорема (Пеано) существования решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка и примеры, пример неединственности.
6. Теорема (Пикара) существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка и примеры.
7. Понятие общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка. Частное решение. Примеры.
8. Дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Уравнения с разделяющимися переменными.
9. Однородные уравнения.
10. Уравнения в полных дифференциалах.

11. Линейные уравнения первого порядка. Общее решение линейного однородного уравнения.
12. Общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка. Метод Бернулли (вариации произвольных постоянных).
13. Уравнение Бернулли и схема его решения. Уравнение Риккати.
14. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной: :
  - 1) метод введения параметра;
  - 2) уравнения Лагранжа и Клеро;
  - 3) теорема существования и единственности решения задачи Коши;
  - 4) особые решения.

**Критерии оценки (в баллах):**

*18- 24баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.*

*- 11-17баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий ответ, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.*

*- 1-10балла выставляется студенту в случае, если студент дал неполный ответ на заданный вопрос и не ответил на один дополнительный вопрос.*

*- 0 баллов выставляется студенту, если студент не ответил на заданный вопрос и не ответил на дополнительные вопросы .*

Вопросы для коллоквиума №2

1. **Линейные системы дифференциальных уравнений  $x' = A(t)x + f(t)$ .  
Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы  $x' = A(t)x$  .**
2. **Формула Коши общего решения однородной  $x' = Ax$  и неоднородной системы  $x' = Ax + f(t)$  дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.**
3. **Краевые задачи для дифференциальных уравнений.** Разрешимость краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
4. **Задача об изгибе стержня.**
5. **Автономные уравнения и системы. Свойства автономных систем. Траектории автономных систем и их отличие от интегральных кривых.**
6. **Точки равновесия (особые точки) и периодические решения (циклы) автономных систем.**
7. **Фазовые пространства и фазовые портреты автономных систем.** Фазовое поле скоростей.
8. **Фазовые портреты автономных уравнений первого порядка.**
9. **Фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка  $x' = Ax$ . Классификация особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр.**
10. **Фазовые портреты нелинейных автономных систем второго порядка в окрестности особой точки.** Линеаризованное уравнение.
11. **Понятие устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений.**  
**Асимптотическая устойчивость.** Свойства устойчивости нулевого решения линейного уравнения  $x' = qx$  при  $q < 0$ ,  $q > 0$  и  $q = 0$ .
12. **Признаки устойчивости нулевой точки равновесия линейных автономных систем  $x' = Ax$ .**
13. **Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем  $x' = f(x)$ .**
14. **Устойчивые матрицы и многочлены. Теорема Стодола. Критерий Рауса-Гурвица.**
15. **Сетки и сеточные функции. Интерполирование функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.**

16. Основы численных методов решения задачи Коши. Приближенное сеточное решение. Ошибка дискретизации.
17. **Метод Эйлера** и метод Рунге-Кутты. Одношаговые и многошаговые методы.
18. **Разностные уравнения: основные понятия.** Методы Эйлера и Рунге-Кутты как разностные уравнения.
19. **Понятие динамической системы. Непрерывные и дискретные системы.** Примеры НДС: модель Мальтуса, модель Ферхюльста. Примеры ДДС: модель Мальтуса, логистическая модель.
20. Решения ДДС. Точки равновесия (неподвижные точки) и циклы ДДС.

#### **Критерии оценки (в баллах):**

*11- 16баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.*

*-4-10баллов выставляется студенту за полный и развернутый ответ на заданный вопрос и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий ответ, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.*

*- 1-4балла выставляется студенту в случае, если студент дал неполный ответ на заданный вопрос и не ответил на один дополнительный вопрос.*

*- 0 баллов выставляется студенту, если студент не ответил на заданный вопрос и не ответил на дополнительные вопросы .*

### **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

#### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

##### **Основная литература**

1. Юмагулов М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения. М.-Ижевск: Изд-во РХД, 2008. ISBN 978-5-93972-652-8. Доступ к тексту возможен через Электронную библиотечную систему (ЭБС) БашГУ, URL : <https://bashedu.bibliotech.ru>
2. Юмагулов М.Г. Введение в теорию динамических систем. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 272 с. ISBN 978-5-8114-1799-5. Доступ к тексту возможен через Электронную библиотечную систему (ЭБС) БашГУ, URL : <https://bashedu.bibliotech.ru> Доступен также через Электронно-библиотечную систему издательства "Лань", URL: <http://e.lanbook.com/>.
3. Альсевич, Л.А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : практикум / Альсевич Л. А. — Минск : "Вышэйшая школа", 2012 .— 384 с. — Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему «Университетская библиотека online» .— ISBN 978-985-06-2111- 978-985-06-2111- 978-985-06-2111- 978-985-06-2111-5 .— <URL: <http://www.biblioclub.ru/book/135999/>>.
4. Егоров, А.И. Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.И. Егоров. - Москва :Физматлит, 2013. - 108 с. : ил. - Библиогр.: с. 105. - ISBN 978-5-9221-1489-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275303>



5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 1985 (58экз)

**Дополнительная литература:**

1. Рыбаков, К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Практический курс : учебное пособие / К.А. Рыбаков, А.С. Якимова, А.В. Пантелеев. - Москва : Логос, 2010. - 384 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-465-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=84753>
2. Егоров, А.И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений / А.И. Егоров. - Москва :Физматлит, 2008. - 254 с. - ISBN 978-5-9221-0942-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68444>
3. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В.А. Треногин. - Москва :Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82614>

**5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

1. «Электронная библиотека БашГУ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплин**

<i>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</i>	<i>Вид занятий</i>	<i>Наименование оборудования, программного обеспечения</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>Аудитория 517</i>	<i>Лекции, лабораторные занятия</i>	<i>Компьютер, мультимедийный проектор, экран, доска.</i>

Приложение № 1

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Дифференциальные уравнения  
(наименование дисциплины)

очная  
форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	7/252
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
лекций	34
практических/ семинарских	18
лабораторных	68
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	1,9
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	86,3
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	43,8

Формы контроля:

Экзамен 4 семестр

зачет 3 семестр

РГР 4 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнит ельная литератур а, рекоменд уемая студентам (номера из списка)	Задания по самостояте льной работе студентов	Форма текущег о контрол я успевае мости (коллок виумы, контрол ьные работы, компью терные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	10
1.	<b>Вводные понятия.</b> Понятие дифференциального уравнения и его решения. Геометрическая интерпретация решений: интегральные кривые, поле направлений, изоклины. Система дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных. Особые решения.	2		2	6	<b>1,4,5, доп.4, 7</b>	решение задач [5] №1-6, № 15, №16 (а, б), № 17-20, №30, № 33, №36, № 36, № 37-45;	Лабораторная работа, РГР, коллоквиум, зачет
2.	<b>Дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Элементарные приемы интегрирования.</b> Уравнения с разделяющимися переменными,	10		8	20	<b>1,4,5, доп.4, 7</b>	решение задач [5] №425, №426, №427, №428, №429,	Лабораторная работа, РГР, коллоквиум, зачет, экзамен

	<p>однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, линейное уравнение первого порядка, уравнения Бернулли и Риккати. Уравнения Лагранжа и Клеро. Уравнения, допускающие понижение порядка.</p>						<p>№455, №456, №457, №458, №463, №464, №465, № 466, № 477, №481, №482, № 483, №241, №24 2, №243, №2 44, №245, № 246, №251, №252, №253, №254, №255, №267, №268, №287,</p>	
3.	<p><b>Линейные дифференциальные уравнения.</b> Линейные уравнения n-го порядка; однородные и неоднородные уравнения. Задача Коши. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Определитель Вронского. Теоремы о структуре общего решения линейного однородного и неоднородного уравнений. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные</p>	6		4	20	<b>1,4,5, доп.4, 7</b>	<p>Решение задач №501, №502 №511, №512, №513, №514, №515, №516, №549, №550, №551, №552, № 575, №576, №577,</p>	<p>Лабораторная работа, РГР, коллоквиум, экзамен</p>

	дифференциальные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка						№578, № 582, № 583, № 584.	
4.	<b>Системы линейных дифференциальных уравнений.</b> Функции от матриц; матричная экспонента. Линейные однородные и неоднородные системы дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы. Формулы общего решения линейной системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.	5		4	20	<b>1,4,5, доп.4, 7</b>	Решение задач: [5] №786, №787, №788, №789, №789, №790, №802, №803, №826, №828, №829, №830, №846, №847, №848, №849	Лабораторная работа, РГР, коллоквиум, экзамен
5.	<b>Автономные уравнения и системы.</b> Фазовые пространства и фазовые траектории автономных систем. Фазовое поле скоростей. Точки равновесия. Фазовые портреты. Фазовые портреты автономных уравнений первого порядка и линейных автономных систем	5		6	20	<b>1,2,3, 5, доп. 1-3</b>	№965, №967, №969, №971, №973, №979, №982, №984, №986, №988, №990[5]	Лабораторная работа, РГР, коллоквиум, экзамен

	второго порядка; классификация особых точек: узел, седло, фокус, центр.							
6	<b>Устойчивость.</b> Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость решений дифференциальных уравнений. Достаточные условия устойчивости точек равновесия автономных систем; устойчивость по первому приближению. Критерий Рауса- Гурвица. Понятие функции Ляпунова.	5		8	20	<b>1,2,3, 5, доп. 1-3</b>	Решение задач; 5]№882, №883, №884, №885,№89 0,№891,№8 94, №899,№90 0, №907, №908, №914, №915, №916, №925, № 926, №932,№93 3, №934, №935	Лаборат орная работа, РГР, коллокви ум, экзамен
7	<b>Динамические системы.</b> Понятие динамической системы. Примеры: модели Мальтуса, Ферхюльста, Лотки- Вольтерра, Ван-дер- Поля, Лоренца. Аттракторы динамических систем.	1			8	<b>1,2,3, 5, доп. 1-3</b>	Упражнени я 1.2-1.1.6 главы 1 [2]	коллокви ум, экзамен
	<b>Всего часов:</b>	52		50	114			

## Приложение 2

### Рейтинг-план дисциплины

#### Дифференциальные уравнения

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки 09.03.03 Прикладная информатика

курс   2  , семестр   3  

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. Дифференциальные уравнения первого порядка</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
РГР №1	3	12	0	36
<b>Рубежный контроль</b>				
Лабораторная работа №1	5	4	0	20
<b>Модуль 2. Дифференциальные уравнения неразрешенные относительно производных. Дифференциальные уравнения высших порядков</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
Коллоквиум №1	24	1	0	24
<b>Рубежный контроль</b>				
Лабораторная работа №2	5	4	0	20
<b>Поощрительные баллы</b>				
Студенческая олимпиада или конкурс рефератов, публикация статей, решение задач повышенной сложности			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Зачет				

**Рейтинг-план дисциплины**

Дифференциальные уравнения

Направление подготовки 09.03.03 Прикладная информатика

курс   2  , семестр   4    
 Рейтинг-план №2 (экзамен)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. Линейные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
РГР №2	2	9	0	18
<b>Рубежный контроль</b>				
Лабораторная работа №3	5	4	0	20
<b>Модуль 2. Устойчивость. Фазовые портреты</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
Коллоквиум №2	16	1	0	16
<b>Рубежный контроль</b>				
Лабораторная работа №4	4	4	0	16
<b>Поощрительные баллы</b>				
Студенческая олимпиада или конкурс рефератов, публикация статей, решение задач повышенной сложности			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Зачет				
2. Экзамен			<b>0</b>	<b>30</b>



