

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол от « 28 » февраля 20 22 г. № 9  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / С.А. Мустафина

Согласовано:  
Председатель УМК факультета  
\_\_\_\_\_ / А.М. Ефимов

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Непрерывные математические модели  
(наименование дисциплины)

Обязательная часть

(указать часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений, факультет))

**программа магистратуры**

Направление подготовки (специальность)

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика  
(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))

Направленность (профиль) подготовки

"Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ"  
(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)

Квалификация

магистр  
(указывается квалификация)

Разработчик (составитель)

доцент каф. математического  
моделирования, к.ф.-м.н., доцент  
(должность, ученая степень, ученое звание)

\_\_\_\_\_ / А.М. Ефимов  
(подпись, Фамилия И.О.)

Для приема: 2022 г.

Уфа 20 22 г.

Составитель / составители: доц. каф. матем. моделирования А.М. Ефимов

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического моделирования протокол от « 28 » февраля 20 22 г. № 9

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры \_\_\_\_\_,  
протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры \_\_\_\_\_,  
протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры \_\_\_\_\_,  
протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры \_\_\_\_\_,  
протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)
4. Фонд оценочных средств по дисциплине
  - 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.
  - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
  - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины
  - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций

По итогам освоения дисциплины обучающийся должен достичь следующих результатов обучения:

Категория (группа) компетенций (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
<i>Теоретические и практические основы профессиональной деятельности</i>	<i>ОПК-1. Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики</i>	<i>ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.</i>	<i>Знать основные методы решения задач; основные теоремы дисциплины</i>
		<i>ОПК-1.2. Умеет использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.</i>	<i>Уметь решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>
		<i>ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</i>	<i>Владеть способностью корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы оптимизации» относится к обязательной части.

Дисциплина изучается на 1-ом курсе в 1-ом семестре.

Цели изучения дисциплины: знакомство с современным состоянием математического моделирования, а также с классическими результатами, относящимися к этой области; знакомство с основными задачами, приводящими к непрерывным математическим моделям, освоение современных методов исследования моделей.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: алгебра и геометрия, математический и функциональный анализ, дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, численные методы и исследование операций.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

#### 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

##### 4.1. Перечень компетенций и индикаторов достижения компетенций с указанием соотнесенных с ними запланированных результатов обучения по дисциплине. Описание критериев и шкал оценивания результатов обучения по дисциплине.

Код и формулировка компетенции: ОПК-1. Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
<i>ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.</i>	<i>Знать основные методы решения задач; основные теоремы дисциплины</i>	<i>Фрагментарные представления об основных методах решения задач; основных теоремах дисциплины</i>	<i>Неполные представления об основных методах решения задач; основных теоремах дисциплины</i>	<i>Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных методах решения задач; основных теоремах дисциплины</i>	<i>Сформированные систематические представления об основных методах решения задач; основных теоремах дисциплины</i>
<i>ОПК-1.2. Умеет использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.</i>	<i>Уметь решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>	<i>Фрагментарные умения решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>	<i>В целом успешное, но не систематическое умение решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>	<i>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>	<i>Сформированное умение решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>
<i>ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</i>	<i>Владеть способностью корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>	<i>Фрагментарное владение способностью корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>	<i>В целом успешное, но не систематическое применение способности корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>	<i>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение способности корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>	<i>Успешное и систематическое применение способности корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценивания результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с установленными в образовательной программе индикаторами достижения компетенций. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

<b>Код и наименование индикатора достижения компетенции</b>	<b>Результаты обучения по дисциплине</b>	<b>Оценочные средства</b>
<i>ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.</i>	<i>Знать основные методы решения задач; основные теоремы дисциплины</i>	Индивидуальный, групповой опрос; контрольная работа, собеседование
<i>ОПК-1.2. Умеет использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.</i>	<i>Уметь решать задачи по дисциплине; определять корректность поставленной задачи; применять на практике знания по предмету.</i>	Индивидуальный, групповой опрос; лабораторные работы; собеседование
<i>ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</i>	<i>Владеть способностью корректно поставить задачу; классическими и современными методами решения задач в профессиональной деятельности</i>	Практическое задание, РГР; экзамен

### **Экзаменационные билеты**

Структура экзаменационного билета: билет состоит из трех вопросов, два из них по теоретической части, один – задача по одной из тем дисциплины.

Примерные вопросы для экзамена:

*1-й вопрос:*

1. Классификация уравнений в частных производных 2 порядка.
2. Вывод уравнений диффузии и теплопроводности (одномерный и трехмерный случаи).
3. Вывод уравнения цепной реакции в диффузионном приближении.
4. Постановки задач для уравнения теплопроводности на отрезке и в трехмерном параллелепипеде. Физический смысл граничных условий.
5. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Понятие корректно поставленной задачи.
6. Редукция общей краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
7. Решение однородного уравнения теплопроводности на отрезке. Построение функции Грина.
8. Решение однородного уравнения теплопроводности в параллелепипеде.
9. Нахождение величины критической массы для цепной реакции в кубическом реакторе.
10. Решение неоднородной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями.
11. Вывод уравнения динамики популяции с учетом двух пространственных переменных.
12. Постановка задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Принцип максимума.
13. Функция Грина. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
14. Вывод уравнения колебания струны и продольных колебаний упругого стержня.
15. Вывод уравнения колебания плоской мембраны.
16. Вывод уравнения колебаний в электрическом контуре.
17. Вывод уравнений акустики.

18. Сведение уравнений Максвелла к волновому уравнению.
  19. Редукция общей задачи для уравнения колебаний на отрезке.
  20. Решение однородного уравнения колебаний струны на отрезке методом разделения переменных.
  21. Вынужденные колебания струны при нулевых начальных и граничных условиях.
  22. Воздействие периодической внешней силы с частотой, близкой к собственной частоте колебаний системы. Резонанс.
- 2-й вопрос:
23. Уравнение динамики популяции с неограниченным и ограниченным ресурсами. Исследование устойчивости установившихся состояний.
  24. Уравнение динамики популяции при наличии отлова. Исследование устойчивости установившихся состояний.
  25. Вывод уравнения динамики популяции с учетом одной и двух пространственных переменных.
  26. Классическая модель Лотки-Вольтерра. Явление периодических колебаний численности популяций.
  27. Обобщение модели Лотки-Вольтерра.
  28. Система уравнений трофической цепочки.
  29. Модель «хищник-жертва» с учетом внутривидовой конкуренции.
  30. Модели конкуренции и симбиоза.
  31. Модель «мертвой» очистки загрязнений.
  32. Модель взаимодействия загрязнения и окружающей среды.
  33. Математическая модель очистки сточных вод.
  34. Простейшая модель классовой борьбы.
  35. Математическая модель очистки сточных вод.
  36. Модель разделения и сосуществования двух групп населения города.
  37. Классическая модель Ланчестера и ее модификации.

**Образец экзаменационного билета:**

**ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»  
Факультет математики и информационных технологий**

Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика  
дисциплина: *«Непрерывные математические модели»*,  
I (7) сем. 20\_\_ - \_\_ учебного года

**Экзаменационный билет № 0**

1. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Понятие корректно поставленной задачи.
2. Модель «хищник-жертва» с учетом внутривидовой конкуренции.
3. Задача по теме дисциплины.

Заведующий кафедрой математического моделирования

д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ С.А. Мустафина.

### **Критерии оценки:**

- **«отлично»** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **«хорошо»** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### **Вопросы для индивидуального, группового опроса, собеседования**

соответствуют тематике занятий и совпадают с соответствующим вопросом экзамена.

### **Критерии:**

- **«отлично»** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **«хорошо»** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.



## Задания для лабораторных работ

1. Найти аттракторы детерминированной модели и провести исследование их устойчивости.
2. Исследовать стохастическую динамику при помощи прямого компьютерного моделирования случайных траекторий.
3. Построить функцию стохастической чувствительности для равновесий и циклов рассмотренных моделей, сравнить с результатами прямого численного моделирования.
4. Построить доверительные области (эллипсы, полосы) вокруг аттракторов модели.

Вариант 1.

Модель Лотки — Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \delta \geq 0.$$

Для  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ;  $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 4$ .

Вариант 2.

Уравнение Ван-дер-Поля (мягкий режим возбуждения автоколебаний)

$$\ddot{x} - \delta(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Вариант 3.

Уравнение Ван-дер-Поля (жесткий режим возбуждения автоколебаний)

$$\ddot{x} - \delta(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x} + x = 0$$

(характерные значения параметров  $a = 5, b = 0,5$ ).

Вариант 4.

Брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y, \\ \dot{y} = bx - ax^2y, \end{cases} \quad a > 0, b > 0.$$

Вариант 5.

Система Хопфа (жесткая бифуркация)

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y, \\ \dot{y} = y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x. \end{cases}$$

Вариант 6.

Модель Базыкина

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\alpha x^2}{N+x} - \beta xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \delta \geq 0.$$

Для  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ;  $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 2$ .

Вариант 7.

Модель Базыкина — Березовской с Олли-эффектом

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-l)(1-x) - xy, \\ \dot{y} = y(x-m), \end{cases}$$

где  $l \in [0, 1]$  — пороговое значение Олли-эффекта,  $m \in [0, 1]$  — скорость смертности хищника.

Вариант 8.

Модель «хищник — жертва» с кубической ограниченностью ресурса

$$\begin{cases} \dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} = xy - my. \end{cases}$$

Вариант 9.

Модель Холлинга — Тэннера динамики системы «хищник — жертва»

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) x - \frac{\alpha xy}{D + x}, \\ \dot{y} = s \left( 1 - J \frac{y}{x} \right) y. \end{cases}$$

Устойчивый предельный цикл существует при условии

$$s < \frac{r(K-d-2)}{K(1+d)}.$$

Вариант 10.

Уравнение Хайрера

$$\ddot{x} + x = \delta \dot{x} - \dot{x}^3.$$

Вариант 11.

Уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x - lx^3 = 0.$$

Вариант 12.

Гликолитический осциллятор Хиггинса

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy, \\ \dot{y} = py \left( x - \frac{1+q}{q+y} \right), \quad p > 0, q > 0. \end{cases}$$

Вариант 13.

Модель Германа

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x - a. \end{cases}$$

Вариант 14.

Модель Фицхью — Нагумо

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{y}{\varepsilon}, \quad a > 0. \\ \dot{y} = x + a, \end{cases}$$

Вариант 15.

Модель Ван-дер-Поля — Дуффинга

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - lx^3 = 0.$$

Вариант 16.

Генератор с жестким возбуждением автоколебаний

$$\ddot{x} + x - (l + mx^2 - x^4)\dot{x} = 0.$$

Устойчивый предельный цикл существует при условии

$$l > -\frac{m^2}{8}.$$

Вариант 17.

Модель нелинейного акселератора-мультипликатора Гудвина

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + \frac{1}{\theta} \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1} \dot{Y} - \frac{\alpha - 1}{\varepsilon \theta} Y + \frac{-\gamma}{\varepsilon \theta} Y^3 = 0, \\ \alpha > 1, \gamma < 0, \varepsilon \in (0, 1], \theta = 2. \end{aligned}$$

Вариант 18.

Модель бизнес-циклов

$$\ddot{x} + (1 - a)\dot{x} + (1 + a)x^3 + bx = 0.$$

Вариант 19.

Модель экономической динамики Калдора

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha(I(Y) + \beta K - 0,5Y), \\ \dot{K} = I(Y) - (\beta + 0,5)K, \end{cases}$$
$$I(Y) = \frac{1}{1 + e^{-4,2(Y-1)}} + 0,6, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Вариант 20.

Система Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu), \end{cases}$$
$$\alpha = 0,2, \mu > 0.$$

Вариант 21.

Трехмерный брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 y - (z + 1)x, \\ \dot{y} = xz - x^2 y, \\ \dot{z} = -xz + \alpha, \end{cases}$$
$$\alpha > 0.$$

Вариант 22.

Генератор Анищенко — Астахова

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \end{cases}$$
$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Вариант 23.

Химический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 3 - x - \lambda xz, \\ \dot{y} = x - yz, \\ \dot{z} = yz - \lambda xz, \end{cases}$$
$$\lambda > 0.$$

Вариант 24.

Система Чена

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = x(c - a) - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$
$$\alpha = 45, c = 28, b > 0.$$

### Критерии оценки (в баллах):

- «отлично» выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **«хорошо»** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### **Задание для расчетно-графической работы**

Расчетно-графическая работа состоит в выполнении комплексного практического задания по тематике лабораторных работ, связанных с численными методами оптимизации.

#### **Критерии оценки:**

- **«отлично»** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **«хорошо»** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Перевод оценки из 5-балльной в двухбалльную для расчетно-графической работы производится следующим образом:

- **«зачтено»** – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно»;
- **«незачтено»** – «неудовлетворительно».

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

#### Основная литература:

1. *А.А.Самарский, А.П.Михайлов.* Математическое моделирование. – М., Физматлит, 2001.
2. *Зализняк, В. Е.* Введение в математическое моделирование: учебное пособие для вузов / В. Е. Зализняк, О. А. Золотов. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 133 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12249-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/476288>
3. *Лобанов, А. И.* Математическое моделирование нелинейных процессов : учебник для вузов / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 255 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8897-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/470988>
4. *Бордовский, Г. А.* Физические основы математического моделирования: учебник и практикум для вузов / Г. А. Бордовский, А. С. Кондратьев, А. Чоудери. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 319 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05365-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452264>
5. *Кафаров, В. В.* Математическое моделирование основных процессов химических производств: учебное пособие для вузов / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 403 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07524-3. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/473966>
6. *Ризниченко, Г. Ю.* Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии: учебное пособие для вузов / Г. Ю. Ризниченко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 181 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07037-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/470480>
7. *Дубина, И. Н.* Основы математического моделирования социально-экономических процессов: учебник и практикум для вузов / И. Н. Дубина. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 349 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00501-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469717>

#### Дополнительная литература:

8. Нефтегазовые технологии: физико-математическое моделирование течений: учебное пособие для вузов / А. Б. Шабаров [и др.]. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 215 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-03665-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/472384>
9. Юдович, В. И. Математические модели естественных наук: учебное пособие / В. И. Юдович. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 336 с. — ISBN 978-5-8114-1118-4. — Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/167860>

10. Кемаева, М. В. Математические модели в экономике: учебно-методическое пособие / М. В. Кемаева. — Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. — 46 с. — Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152929>

## 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- Открытый образовательный видеопортал UniverTV.ru. Образовательные фильмы на различные темы. Лекции в ведущих российских и зарубежных вузах. Научная конференция или научно-популярная лекция по интересующему вас вопросу. <http://univertv.ru/video/matematika/>
- Общероссийский математический портал. <http://www.mathnet.ru>
- ЭБС «Университетская библиотека онлайн»;
- ЭБС издательства «Лань»;
- ЭБС «Электронный читальный зал»;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (<http://window.edu.ru>);
- Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
- Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.
- Среда разработки Microsoft Visual Studio Community 2017 (Условия лицензии на программное обеспечение Microsoft Visual Studio Community 2017, свободное программное обеспечение).
- AcademicEdition Networked Volume Licenses RAD Studio XE3 Professional Concurrent AppWaveEnglish; договор №263 от 07.12.2012 г.
- Simply Linux x86\_64 (лицензионный договор на программное обеспечение Simply Linux 8.2.0 и включенные для него программы для ЭВМ, свободное программное обеспечение)
- Python 3.7 (лицензия Python SoftwareFoundationLicense, свободное программное обеспечение)

## 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
1	2	3
<p><b>1. учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа:</b> аудитории № 531 (физмат корпус - учебное).</p> <p><b>2. учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа:</b> аудитории № 520а, (физмат корпус - учебное).</p>	<p><b>Аудитория № 531</b> Учебная мебель, доска, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (2101068302), доска аудитор.ДА32.</p> <p><b>Аудитория № 520а</b> Учебная мебель, доска, монитор LG 19 L1942S SF 1280 x 1024,5ms,8000:1,black (3,4кг,VGA, 19"(48,3см)5мс, мониторы LG 19" L1942S BF</p>	<p>1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.</p> <p>3. Среда разработки Microsoft Visual Studio Community 2017 (Условия лицензии на программное обеспечение Microsoft Visual Studio</p>

<p><b>3. учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций:</b> аудитории №531,520а.</p> <p><b>4. учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации:</b> аудитории № 531,520а (физмат корпус - учебное).</p> <p><b>5. помещения для самостоятельной работы:</b> аудитория № 426 (физмат корпус - учебное), читальный зал № 2 (физмат корпус - учебное).</p> <p><b>6. помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования -</b> аудитория № 522 (физмат корпус - учебное)</p>	<p>1280x1024,5ms,8000:1,black 10 шт., системный блок HP Pavilion Slimline S3500FAMD Athlon64 X2 5400+/2.8GHz,4Gb,500Gb 12 шт.,доска аудитор.ДА36</p> <p><b>Аудитория №522</b> Учебная мебель, доска, персональный компьютер LenovoThinkCentre A70z IntelPentium E 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., кондиционер LessarLS/LU-H24KB2.</p> <p><b>Аудитория № 426</b> Учебная мебель, доска, персональные компьютеры Lenovo ThinkCentre A70z Intel Pentium E 5800, 320 Gb, 19" – 13 шт., шкаф TLK TWP-065442-G-GY.</p> <p><b>Читальный зал №2</b> Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.</p>	<p>Community 2017, свободное программное обеспечение).</p> <p>4. AcademicEdition Networked Volume Licenses RAD Studio XE3 Professional Concurrent AppWaveEnglish; договор №263 от 07.12.2012 г.</p> <p>5. Simply Linux x86_64 (лицензионный договор на программное обеспечение Simply Linux 8.2.0 и включенные для него программы для ЭВМ, свободное программное обеспечение)</p> <p>6. Python 3.7 (лицензия Python SoftwareFoundationLicense, свободное программное обеспечение)</p>
--	--	---

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины Непрерывные математические модели на I семестр  
(наименование дисциплины)очная  
форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5 / 180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	37,7
лекций	18
практических/ семинарских	
лабораторных	18
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем) (ФКР)	1,7
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	89,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	52,8

Форма(ы) контроля:

экзамен I семестр

зачет \_\_\_\_\_ семестр

В том числе:

расчетно-графическая работа I семестр, контактных часов – 0,5, часов на самостоятельную работу – 10.



№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Часть I. Введение. Основные представления о роли математического моделирования.	4			18	[1, 2]	[9]	Индивидуальный, групповой опрос, собеседование
2.	Часть II. Математические модели на основе уравнений в частных производных второго порядка.	6		8	24	[3, 4, 5]	[8]	Лабораторные работы
3.	Часть III. Математические модели биологии, экологии и социально-экономических процессов.	8		10	37,5	[6, 7]	[10]	Лабораторные работы
	Расчетно-графическая работа				10			РГР
	<b>Всего часов:</b>	18		18	89,5			

## Содержание курса

### Часть I. Введение. Основные представления о роли математического моделирования.

Математическое моделирование в науке как средство изучения природных, инженерных и общественных систем. Типы моделирования. Особенности математического моделирования. Понятие вычислительного эксперимента. Понятие виртуальных аналогов сложных объектов и суперкомпьютерное моделирование. Примеры явлений, которые могут быть изучаемы только методами математического моделирования.

### Часть II. Математические модели на основе уравнений в частных производных второго порядка.

Типы линейных уравнений в частных производных второго порядка. Инвариантность типа относительно замены переменных. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов. Процессы теплопроводности и диффузии в одномерном и трехмерном случаях.

Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Корректная постановка краевых задач для уравнений параболического типа. Метод разделения переменных для решения задач теплопроводности в одномерном и трехмерном случаях. Модель цепной реакции в диффузионном приближении, критическая масса. Задача для уравнения теплопроводности на неограниченной прямой и в неограниченном пространстве. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом функций Грина.

Процессы, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Уравнение колебаний струны. Уравнение продольных колебаний стержня. Уравнения акустики. Уравнения Максвелла и вывод из них волнового уравнения. Постановка задач для уравнения колебаний. Формула Даламбера и скорость распространения волн. Метод разделения переменных для решения задачи о колебаниях струны. Вынужденные колебания, явление резонанса.

Описание стационарного распределения тепла с помощью уравнения эллиптического типа. Уравнения электростатики и магнитостатики. Корректная постановка краевых задач для уравнений эллиптического типа. Метод разделения переменных. Потенциалы.

### **Часть III. Математические модели биологии, экологии и социально-экономических процессов.**

Модели неограниченного роста популяции и модель с учетом ограниченности ресурса. Модели потребления-восстановления биоресурса. Понятие об устойчивом и неустойчивом стационарных режимах.

Классическая модель Лотки-Вольтерра «хищник-жертва». Режимы установившихся колебаний. Модели трофической цепочки, конкуренции и симбиоза. Обобщенная модель Лотки-Вольтерра. Математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой. Математическая модель очистки сточных вод. Учет пространственных распределений в модели Лотки-Вольтерра.

Математическое моделирование социально-экономических систем. Модель динамики популяции (модель Хотеллинга). Модель разделения и сосуществования двух групп населения города. Модель классовой борьбы. Модель боевых действий (модель Ланчестера) и ее модификации.