



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 9 от «28» февраля 2022 г.  
Зав. кафедрой  / Юмагулов М.Г.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета математики и  
информационных технологий  
 / Ефимов А.М.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Динамические системы с дискретным временем

Часть, формируемая участниками образовательных отношений

**программа магистратуры**


Направление подготовки (специальность)

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Квалификация  
магистр

Разработчики (составители) зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор	 / Юмагулов М.Г.
--	--

Для приса: 2022 г.

Уфа 2022 г.

Составитель: зав. кафедрой , д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.

Рабочая программа дисциплины актуализирована на заседании кафедры дифференциальных уравнений протокол от № 9 от «28» февраля 2022 г.

Дополнения и изменения, внесённые в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры дифференциальных уравнений: обновлён фонд оценочных средств. протокол № 9 от «28» февраля 2022 г.

Зав. кафедрой  / Юмагулов М.Г.

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы 4
  2. Место дисциплины в структуре образовательной программы 5
  3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся) 5
  4. Фонд оценочных средств по дисциплине
    - 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания 5
    - 4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций 7
    - 4.3. Рейтинг-план дисциплины 7
  5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
    - 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины 11
    - 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины 11
  6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине 12
- 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы (с ориентацией на карты компетенций)**

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ПК- 1 Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук	ПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	<b>Знать</b> фундаментальные основы, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных

		технологий
	ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	<b>Уметь:</b> находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий
	ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	<b>Владеть:</b> практическим опытом в научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий
ПК – 2 Способен проводить научные исследования, на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-2.1. Владеет современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках.	<b>Владеть:</b> современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации, навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках.
	ПК-2.2. Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	<b>Уметь:</b> решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-2.3. Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности	<b>Владеть:</b> навыками выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Динамические системы с дискретным временем» относится к части Дисциплины по выбору.

Дисциплина изучается на 1 курсе во 2 семестре.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра»,

«Дифференциальные уравнения», «Уравнения в частных производных», «Динамические системы». Изучение дисциплины «Динамические системы с дискретным временем» содействует формированию глубокого понимания теории динамических систем и ее приложений.

### 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

### 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

#### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код и формулировка компетенции

ПК-1: Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения	
		«Не зачтено»	«Зачтено»
ПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	<b>Знать</b> фундаментальные основы, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Не знает совсем либо знает неудовлетворительно фундаментальные основы, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Демонстрирует свободное и уверенное знание фундаментальные основы, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий
ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной	<b>Уметь:</b> находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной	Отсутствие умений находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области программирования и	Сформированное умение находить, формулировать и решать стандартные задачи в

научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	информационных технологий	собственной научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий
ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	<b>Владеть:</b> практическим опытом в научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	Отсутствие владений практическим опытом в научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	Успешные владения практическим опытом в научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий

ПК- 2 - Способен проводить научные исследования, на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения	
		«Не зачтено»	«Зачтено»
ПК-2.1. Владеет современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на	<b>Владеть:</b> современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации, навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и	Не владеет совсем современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации, навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском	Успешные владения современным и методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации, навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках.

русском и английском языках.	английском языках.	языках.	
ПК-2.2. Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	<b>Уметь:</b> решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	Отсутствие умений решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	Сформированное умение решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-2.3. Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности	<b>Владеть:</b> навыками выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности	Отсутствие владений навыками выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности	Успешные владения навыками выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности

Показатели сформированности компетенции:

Критериями оценивания являются оценки (зачтено /не зачтено), которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения разделов дисциплины, а именно — оценивается выполнение контрольных работ, ответы на занятиях, выступление на семинарах.

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),  
не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	<b>Знать</b> фундаментальные основы, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Лабораторная работа, доклад на семинаре
ПК-1.2. Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно- исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	<b>Уметь:</b> находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно- исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	Лабораторная работа, доклад на семинаре
ПК-1.3. Имеет практический опыт научно исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	<b>Владеть:</b> практическим опытом в научно исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий	Лабораторная работа, доклад на семинаре
ПК-2.1. Владеет современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках.	<b>Владеть:</b> современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации, навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках.	Лабораторная работа, доклад на семинаре
ПК-2.2. Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	<b>Уметь:</b> решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	Лабораторная работа, доклад на семинаре
ПК-2.3. Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности	<b>Владеть:</b> навыками выступлений и научной аргументации в профессиональной деятельности	Лабораторная работа, доклад на семинаре

#### 4.3. Примерные вопросы для зачета:

1. Динамические системы. Непрерывные и дискретные модели. Примеры: математический маятник, модель Мальтуса, логистическая модель, модель



``хищник-жертва".

2. Дискретные динамические системы. Неподвижные точки (точки равновесия) и циклы ДДС.
3. Устойчивость неподвижных точек и циклов ДДС. Признаки устойчивости.
4. Линейные ДДС. Рекуррентные уравнения.
5. Фазовые портреты одномерных и двумерных линейных ДДС.
6. Одномерные дискретные системы. Паутинная диаграмма.
7. Гиперболические и негиперболические точки равновесия и циклы ДДС.
8. Топологический тип точки равновесия ДДС.
9. Структурная устойчивость ДС. Понятие о бифуркациях динамических систем. Примеры.
10. Логистическое отображение и его точки бифуркации.
11. Основные сценарии локальных бифуркаций ДДС: бифуркации состояний равновесия, бифуркации удвоения периода, бифуркация q-циклов. Примеры.
12. Понятие о динамическом хаосе. Сценарий Фейгенбаума.
13. Динамические системы, описываемые неавтономными дифференциальными уравнениями с периодической правой частью. Отображение Пуанкаре.
14. Основные сценарии локальных бифуркаций в периодических неавтономных системах.

### **Примерный список тем на семинары**

1. Периодичность Шарковского.
2. Периодические неавтономные динамические системы.
3. Отображение Пуанкаре.
4. Бифуркации в системах, описываемые неавтономными дифференциальными уравнениями с периодической правой частью.
5. Аттракторы дискретных динамических систем.
6. Решение линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами.
7. Показатели Ляпунова дискретных динамических систем.

### **Критерии оценки (в баллах):**

- 10 баллов выставляется студенту за полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.

- 5-9 баллов выставляется студенту в случае, если студент сделал полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий доклад, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.
- 1-4 балла выставляется студенту в случае, если студент сделал неполный доклад на семинаре на заданную тему и не ответил ни на один дополнительный вопрос.
- 0 баллов выставляется студенту, если им не был сделан доклад на заданную тему.

### Задания для контрольной работы

#### Описание контрольной работы:

В семестре студенту представляется две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из четырех объемных заданий. Задача считается правильно решенной, если студентом приведено подробное и полное ее решение. Каждое задание оценивается в 3 балла. В случае, если студент не справляется с более 50% заданий по обоим контрольным, он не допускается к сдаче экзамена. У каждого студента есть возможность пересдать контрольную работу.

#### Пример варианта контрольной работы:

##### Контрольная работа №1.

1. Найти неподвижные точки одномерных ДДС, описываемых уравнениями  $x_{n+1}=f(x_n)$  и  $x_{n+1}=g(x_n)$ . Изучить свойства устойчивости неподвижных точек. Изобразить поведение системы  $x_{n+1}=f(x_n)$  с помощью паутиной диаграммы.  
Варианты:  
А)  $f(x)=x^3-2x^2+2$ ,  $g(x)=1+x+\sin\{2x\}$ ,  
Б)  $f(x)=x^3-2x^2+2$ ,  $g(x)=1+x+\cos\{2x\}$ .
2. Определить точки равновесия и циклы периода 2 дискретной динамической системы  $x_{k+1}=f(x_k)$  (если, конечно, они существуют).  
Варианты:  
А)  $f(x)=-x^3$ ,  
Б)  $f(x)=1-x^2$ .
3. Дана линейная дискретная система  
$$x_{n+1}=A(\mu)x_n + a(x_n),$$
  
$$\quad x \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}^1.$$
  
3.1) Определить (в зависимости от параметра  $\mu$ ) топологический тип точки равновесия  $x=0$  этой системы.  
3.2) При каких значениях  $\mu$  точка равновесия  $x=0$  имеет топологический тип  $(1,1,0)$ ?  
3.3) При каких значениях  $\mu$  система имеет ненулевые точки равновесия? Указать эти точки.  
3.4) При каких значениях  $\mu$  система имеет циклы периода

два? Указать эти циклы.

3.5) При каких значениях  $\mu$  система представляет собой отображение окружности? При каких значениях  $\mu$  она имеет циклы периода 4?

Варианты:

А) \$\$

$A(\mu) = \left[ \begin{array}{c} 9 - \mu & -14,5 - 3\mu \\ 2\mu & -5 + \mu \end{array} \right]$ ,

\$\$

Б) \$\$

$A(\mu) = \left[ \begin{array}{c} 4 + \mu & -3\mu \\ 6 - 2\mu & -6 + 4\mu \end{array} \right]$ , \quad

\$\$

#### Описание методики оценивания:

Критерии оценки (в баллах)

12 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;

9 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

6 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;

3 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно.

### 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

##### Основная литература:

1. Юмагулов, М.Г. Введение в теорию динамических систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.Г. Юмагулов. — Электрон.дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/56177>. Доступ возможен и через Электронную библиотеку БашГУ .

2. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. — 360 с.

##### Дополнительная литература:

3. Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории: Учеб. пособие для студ. по спец. 01.02 "Прикладная математика" / Пер. с англ. Т.Э.Кренкеля, А.Л.Соловейчика под ред. Т.Э.Кренкеля. — М. : Постмаркет, 2000. — 350с.

4. Ахромеева, Т.С. Структуры и хаос в нелинейных средах [Электронный ресурс] / Ахромеева Т. С. — М. :Физматлит, 2007 .— 483 с. — Доступ к тексту электронного издания возможен через Электронно-библиотечную систему «Университетская библиотека online» .— ISBN 978-5-9221-0887-4 .— <URL:<http://www.biblioclub.ru/book/67298/>>

## 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

1. «Электронная библиотека БашГУ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>

## 6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>Аудитория 523</i>	<i>Лекции, практические занятия</i>	<i>Компьютер, мультимедийный проектор, экран, доска.</i>

## ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины Динамические системы с дискретным временем  
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Рабочую программу осуществляют:

Лекции: д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.  
(должность, уч. степень, ф.и.о.)

Практические занятия: д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.  
(должность, уч. степень, ф.и.о.)

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	2/72
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
Лекций	16
практических/ семинарских	
лабораторных	16
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	0,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС) включая подготовку к экзамену/зачету	39,8

**Формы контроля:**  
зачет 2 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)	Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы,
----------	-------------------	---	---	---	---

		Всего	ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	<p>Динамические системы.</p> <p>Непрерывные и дискретные модели.</p> <p>Примеры:</p> <p>математический маятник, модель Мальтуса,</p> <p>логистическая модель, модель "хищник-жертва".</p> <p>Дискретные динамические системы.</p> <p>Неподвижные точки (точки равновесия) и циклы ДДС.</p>	32	6		6	20	[1]- [5]	[1]-[3]	Контрольная работа, доклад на семинаре

	Устойчивость неподвижных точек и циклов ДДС. Признаки устойчивости.								
2.	Линейные ДДС. Рекуррентные уравнения. Фазовые портреты одномерных и двумерных линейных ДДС. Одномерные дискретные системы. Паутинная диаграмма.	32	6		6	20	[1]-[5]	[1]-[3]	Контрольная работа, доклад на семинаре
3.	Гиперболические и негиперболические точки равновесия и	38	8		8	22	[1] -[5]	[1]-[3]	Доклад на семинаре



	циклы ДДС. Топологический тип точки равновесия ДДС.								
4.	Структурная устойчивость ДС. Понятие о бифуркациях динамических систем. Логистическое отображение и его точки бифуркации. Основные сценарии локальных бифуркаций ДДС: бифуркации состояний равновесия, бифуркации удвоения периода,	38,8	8		8	22,8	[1]-[5]	[1]-[3]	Контрольная работа, доклад на семинаре

	бифуркация q-циклов. Понятие о динамическом хаосе. Сценарий Фейгенбаума.								
5.	Динамические системы, описываемые неавтономными дифференциальными уравнениями с периодической правой частью. Отображение Пуанкаре.	38	8		8	22	[1]-[5]	[1]-[3]	Контрольная работа, доклад на семинаре
	<b>Всего часов:</b>	71,8	16	16		39,8			

