



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено:  
на заседании кафедры  
протокол № 9 от «28» февраля 2022 г.  
Зав. кафедрой  / Юмагулов М.Г.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета математики и  
информационных технологий  
 / Ефимов А.М.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Дисциплина Дифференциальные уравнения в задачах экономико-математического моделирования

Обязательная часть


**программа магистратуры**

Направление подготовки (специальность)

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки  
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Квалификация  
магистр

Разработчики (составители) доцент, к.ф.-м.н., доцент	 / Назирова Э.А.
---	--

Для прisma: 2022 г.

Уфа 2022 г.

Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	6
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	7
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	7
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	8
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	13
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	25
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	25
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	25
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	26
Приложение №1	27

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**  
(с ориентацией на карты компетенций)

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Категория (группа) компетенций <sup>1</sup> (при наличии ОПК)	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	<i>ОПК-2. Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении</i>	ОПК-2.1. Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках	Знать основные принципы построения математических моделей на основе теории дифференциальных уравнений
		ОПК-2.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	-Уметь формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования
		ОПК-2.3. Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания.	-Владеть фундаментальными знаниями в области математического моделирования -Владеть способностью использовать новые математические модели при решении задач экономико-математического моделирования.

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «*Дифференциальные уравнения в задачах экономико-математического моделирования*» входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули).

Дисциплина «*Дифференциальные уравнения в задачах экономико-математического моделирования*» изучается на 1 курсе в 1 и 2 семестрах.

Дисциплина «*Дифференциальные уравнения в задачах экономико-математического моделирования*» связана с такими дисциплинами как «Компьютерные технологии в науке и образовании».

Целью преподавания дисциплины «*Дифференциальные уравнения в задачах экономико-математического моделирования*» является формирование у обучающихся представления об динамических подходах в экономическом моделировании, ознакомление с современными методами и подходами к анализу линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений, описывающих многочисленные процессы и явления, протекающие в экономических и социальных системах. Приобретение навыков динамического анализа, развитие аналитического мышления у обучающихся.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Процесс освоения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций:

**ОПК-2** - Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)
ОПК-2.1. Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках	Знать основные принципы построения математических моделей на основе теории дифференциальных уравнений	Отсутствие знаний или фрагментарные представления об основных принципах построения математических моделей экономической динамики с	Неполные представления об основных принципах построения математических моделей экономической динамики с использованием теории дифференциальных и	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных принципах построения математических моделей	Сформированные систематические представления об основных принципах построения математических моделей экономической динамики с использованием



		использованием теории дифференциальных и разностных уравнений	разностных уравнений	экономической динамики с использованием теории дифференциальных и разностных уравнений	теории дифференциальных и разностных уравнений
ОПК-2.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования	Отсутствие умений или фрагментарные умения формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования.	В целом успешное, но не систематическое использование умения формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использования умения формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования	Сформированное умение формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования
ОПК-2.3. Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания.	Владеть фундаментальными знаниями в области математического моделирования -Владеть способностью использовать новые математические модели при решении задач экономико-математического моделирования.	Отсутствие владения или фрагментарное владение навыками применения асимптотических методов и подходов как к теоретическим проблемам, так и к задачам формирования выводов по соответствующим исследованиям.	В целом успешное, но не систематическое владения навыками использования асимптотических методов и подходов как к теоретическим проблемам, так и к задачам формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применения навыков использования асимптотических методов и подходов как к теоретическим проблемам, так и к задачам формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	Успешное и систематическое применение навыков использования асимптотических методов и подходов как к теоретическим проблемам, так и к задачам формирования выводов по соответствующим научным исследованиям

Показатели сформированности компетенции:

Критериями оценивания являются оценки, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения разделов дисциплины, а именно — оценивается выполнение лабораторных работ, ответы на занятиях, результаты опросов на лекциях, ответы на экзамене и защита РГР.

Шкалы оценивания:

**Экзамен:**

- 5 - отлично
- 4 - хорошо
- 3 - удовлетворительно
- 2 - неудовлетворительно

**Расчетно-графическая работа (РГР):**

- зачтено
- не зачтено

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

дисциплине.

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-2.1. Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках	Знать основные принципы построения математических моделей на основе теории дифференциальных уравнений	Лабораторные работы, опросы, ргр, экзамен
ОПК-2.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь формулировать и решать задачи экономико-математического моделирования на основе теории дифференциальных уравнений -Уметь выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования	Лабораторные работы, опросы, ргр, экзамен
ОПК-2.3. Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания.	Владеть фундаментальными знаниями в области математического моделирования -Владеть способностью использовать новые математические модели при решении задач экономико-математического моделирования.	Лабораторные работы, опросы, ргр, экзамен

**Экзаменационные билеты**

Экзамен является оценочным средством для всех этапов освоения компетенций.

Структура экзаменационного билета: 2 вопроса. Оба вопроса носят теоретический характер. Примерные вопросы для экзамена:

Теоретические вопросы:

1. Функции и переменные в экономике (эндогенная и экзогенная переменные), понятие о данных и их анализе,
2. Регрессионный анализ. Линейная регрессия.
3. Примеры функций в экономике. Спрос-предложение. Производственная функция. Функции Торнквиста и др.
4. Эластичность и другие характеристики функций в экономике.
5. Модели неограниченного роста, задачи о росте капитала, запаса ресурсов, роста населения и др. Правило 70.
6. Модели роста с ограничением. Модели распространения рекламы (вируса), логистические

- кривые и их свойства.
7. Модели инвестиций. Замкнутая модель, выбытие фондов.
  8. Модели инвестиций. Открытая модель, парадоксы инвестирования.
  9. Модели инвестиций, определение оптимального графика инвестирования.
  10. Статическая модель Леонтьева. История создания модели, ее приложения для различных экономик (на примере США).
  11. Свойства матриц продуктивности. Число Фробениуса, запас продуктивности,
  12. Динамическая модель Леонтьева.
  13. Анализ и интерпретации статических и динамических моделей Леонтьева и их обобщения (Занг)
  14. Разностные уравнения. Линейные разностные уравнения и их свойства. Методы решений.
  15. Основные разностные модели экономической динамики
  16. Паутинная модель рынка
  17. Модели Самуэльсона и Самуэльсона- Хикса
  18. Модели Лоренца развития городов
  19. Модели Калецкого (1-я и 2-я).
  20. Другие модели экономической динамики (Модель Филлипса)
  21. Нелинейные модели экономической динамики (обзор)
  22. Модель Ромера, влияние НТП на ВВП и его моделирование.

Образец экзаменационного билета:

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Экзаменационный билет №0**  
**по курсу «Дифференциальные уравнения в задачах экономико-математического  
моделирования»**  
**(2018-2019 у.г.)**

1. Динамические модели в экономике. Примеры (Модель Самуэльсона-Хикса).
2. Моделирование с помощью функции Торнквиста товаров первой необходимости.

Преподаватель Назирова Э.А. / \_\_\_\_\_ /

Зав. кафедрой Юмагулов М.Г. / \_\_\_\_\_ /

**Критерии оценки (в баллах):**

- **5 баллов (отлично)** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

- **4 (хорошо)** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.

- **3 (удовлетворительно)** баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.

- **2 (неудовлетворительно)** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить на серию дополнительных вопросов.

### Задания для оценки знаний и контроля самостоятельной работы:

При выполнении лабораторных работ может быть задействован пакет Maple.

Первая лабораторная работа состоит из шести заданий. .

#### ЛР №1:

1. По статистическим данным построить функции Торнквиста для товаров первой и второй необходимости, предметов роскоши.
2. Вывод правила N, аналогичное правилу 70 для удвоения капитала (утроение, учетверение и т.д.).
3. Построение и анализ модели роста (запас ресурсов, рост популяции).
4. Построение и анализ модели распространения рекламы нового продукта (по исходным данным). Построения графика, определение эластичности.
5. Построение и решение модели рыночного равновесия с прогнозируемыми ценами.
6. Анализ эффективности инвестиций. Определение оптимального графика инвестирования.

Вторая лабораторная работа состоит из четырех заданий. .

#### ЛР №2:

1. Построение матрицы продуктивности для статической модели Леонтьева по набору данных. Анализ и решение модели. Запас продуктивности.
2. Решение динамической модели Леонтьева, анализ на устойчивость.
3. Решение разностных уравнений. Общее и частное решение.
4. Решение уравнения Самуэльсона-Хикса и паутиной модели рынка. Стохастическое моделирование паутиной модели.

Третья лабораторная работа состоит из трех заданий. .

#### ЛР №3:

1. Построение, решение и анализ модели Солоу.
2. Модели Калецкого (ранняя и поздняя). Анализ на устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений экономической динамики.
3. Анализ одной из предложенных динамических моделей (самостоятельный сбор информации, исторический обзор, разбор примера, интерпретация решения).

Описание методики оценивания:

#### Критерии оценки (в баллах):

За отчёт по лабораторной работе студент получает текущие оценки, которые потом преподаватель учитывает при допуске к экзамену, на самом экзамене, при защите РГР.

- 5 баллов выставляется студенту, если нет замечаний;

- 4 балла выставляется студенту, если имеются незначительные замечания;

- 3 баллов выставляется студенту, если в целом получены верные результаты, но имеются существенные замечания.

- 2 (неудовлетворительно) в остальных случаях.

## Опросы

### Пример опроса №1:

1. Определение экзогенной и эндогенной переменной
2. Примеры экономических зависимостей
3. Что такое темп?
4. Эластичность
5. Модели Мальтуса (роста) /модель роста с ограничением
6. Для логистического уравнения в модели распространения рекламы определите положения равновесия и их тип.
7. Пример модели рыночного равновесия (определения равновесной цены).
8. Общий вид открытой модели с учетом инвестиций
9. Какое условие задает фиксированный объем инвестиций
10. Что такое временной лаг в экономике (пример).

### Пример опроса №2:

1. Пример линейного разностного уравнения
2. Модель Солоу
3. Периодические решения разностных уравнений.
4. Продуктивная матрица, определение.
5. Число Фробениуса /Запас продуктивности.
6. Общий вид модели Леонтьева (статической/динамической)
7. Паутинная модель (пример)
8. Уравнение Самуэльсона-Хикса (пример)
9. Пример динамической модели, основанной на уравнении в частных производных
10. Модель Калецкого (ранняя/поздняя)

### Описание методики оценивания:

#### Критерии оценки (в баллах):

За опросы выставаются текущие оценки по 0.5 баллов за каждый правильный ответ.

## Задания для РГР

### 1. Эффективность рекламы

Некая фирма подготовила для реализации новый продукт. Для его продвижения в начальный момент была проведена рекламная компания, в результате которой о новинке узнали  $N/\gamma$  покупателей. Здесь  $N$  – общее число потенциальных покупателей новинки,  $1 > \gamma$ . Найдем, как будет меняться число покупателей, знающих о новинке, зависимости от времени, учитывая, что далее информация о нем распространяется путем общения покупателей друг с другом. Обозначим  $x(t)$  – число покупателей, знающих о новинке в момент времени  $t$ . Изменение этой величины будет пропорционально количеству знающих о новинке, также числу покупателей, не знающих о ней, и промежутку времени  $dt$ , за которое это изменение происходит:

$$dx = kx(N - x)dt,$$

при этом  $x(0) = N/\gamma$ .

**Задание 1** Здесь и далее  $m$  – Ваш номер в списке группы (спросить у старосты).

При выпуске нового товара на рынок фирма проводит рекламную акцию, в результате которой из общего числа потенциальных покупателей  $N = m * 10000$  чел о новинке узнают  $100 * m + 0.2 * N$  покупателей. После этого сведения о новом товаре распространяются с помощью передачи информации от одних покупателей другим. Причем изменение числа знающих о новинке  $x$  пропорционально как и  $x$ , так и  $N - x$  с коэффициентом пропорциональности  $k = m * 10^{-4}$  чел/день. Составить уравнение для нахождения зависимости  $x(t)$ , решить его и найти  $x(50 + m)$ , построить график. Определить время, через которое число людей, знающих о новинке удвоится?

### 2. Распространение вируса.

#### Задание 2

В поселке с населением  $N = m * 20000$  человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается уравнением

$$dy = 0.0001 * m * y(N - y)$$

где  $y$  – число заболевших в момент времени  $t$ ;  $t$  – число недель. Сколько больных будет в поселке через одну, две, три недели, если в начальный момент было  $100 * m$  больных?



### 3. Спрос и предложение.

Как известно, спрос и предложение – экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена. При этом спрос – представленная на рынке потребность в товарах, а предложение – продукт, который есть на рынке или может быть доставлен на него. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается во взаимозависимости спроса и предложения и их объективном стремлении к **равновесию**. В простейших ситуациях спрос на товар ( предложение товара) предполагается зависящим лишь от его цены. В более сложных случаях в расчет принимается также зависимость спроса ( предложения ) от скорости изменения цены.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени крестьянин продает на рынке фрукты (например, яблоки), причем продает их после уборки урожая, с недельными перерывами. Тогда, при имеющихся у крестьянина запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а последующие недели повысятся, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается ее падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем. Если обозначить через  $p$  цену на фрукты в наступающей неделе, а через  $p'$  - так называемую тенденцию формирования цены ( производную цены от времени ), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задается линейной зависимостью, математически описываемой соотношением  $y = bp' + ap + c$ , где  $a, b, c$  – некоторые вещественные постоянные.

#### Задание 3.

Функции спроса и предложения имеют вид:

$$x = 50m^2 + m - 5(m + 1)p + (3 + m/10)p', \quad y = 10m^2 - 4mp + (4 + m/10)p'$$

- Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент  $p = 150 + m$ .
- Найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ . Является ли равновесная цена устойчивой?
- найти значение равновесного спроса  $g$ ) Построить график зависимости равновесной цены, спроса и предложения от времени.

#### 4. Эластичность.

В некоторых случаях представляет интерес функция спроса при данной эластичности. Эластичность – эта мера реагирования одной переменной величины на изменение другой. Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1 процент и определяется с помощью соотношения

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены ( ценовая эластичность ). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на один процент. Если эластичность спроса  $|E_x(y)| < 1$ , то спрос считается эластичным, если  $|E_x(y)| = 1$  - нейтральным ( с единичной эластичностью ), а если  $|E_x(y)| > 1$  неэластичным относительно цены. Если известна эластичность спроса на некоторый товар, то можно найти функцию спроса.

**Задание 4** Известно, что  $E_p(d) = -\frac{10}{m+5}$  для любых значений  $p$  и  $p = 2m$  при  $d = 1$ . Найти функцию спроса  $d(p)$ . Найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(p)$

#### 5. Изменение объема продукции, реализованной к моменту времени $t$

Пусть  $y = y(t)$  - объем продукции, реализованной к моменту времени  $t$ . Функция  $y = y(t)$  удовлетворяет тому же уравнению

$$y'(t) = nply$$

где  $n$  – норма инвестиций,  $p$  – продажная цена,  $l$  – коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции.

**Задание 5.** Найти зависимость  $y = y(t)$  объема реализованной продукции от времени, предполагая, что цена на товар задается функцией  $p(y) = (m + 2^{-y}) \cdot y^{-1}$ , если норма инвестиций  $n = 0.01 * m$ , коэффициент пропорциональности  $l = 0, 5$ , значение  $y(0) = m + 5$ .

#### 6. Модель рынка с прогнозируемыми ценами

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят еще и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени  $t$

функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены  $P(t)$ . Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса  $D$  и предложения  $S$  имеют следующие зависимости от цены  $P$  и ее производных:

$$D(P) = aP'' + bP' + cP$$

$$S(P) = dP'' + eP' + fP$$

Данные зависимости вполне реалистичны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос "подогревается" темпом изменения цены: если темп растет ( $P'' > 0$ ), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при  $P''$  в функции  $S(P)$  больше, чем в  $D(P)$ . Рост цены также увеличивает предложение, потому слагаемое, содержащее  $P'$ , входит в выражение для  $S(P)$  со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством  $D = S$ , приравняем правые части уравнений и приходим к ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

**Задание 6.** Найти динамику цены  $P(t)$  на товар, а так же  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ , если прогноз спроса и предложения описывается следующими соотношениями:

$$D(P) = mP'' - 4P' - (45 - m)P$$

$$S(P) = (m + 1)P'' + mP' + mP - 100m$$

$$t = 0, \quad P = 30 + m, \quad P' = 0$$

## 7. Разностные уравнения в экономике первого порядка. Паутинная модель рынка

Рассмотрим паутинную модель рынка. При этом предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями, но при этом спрос зависит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е.  $d_t = a - bp_t$  (функция спроса),

$s_t = r + np_{t-1}$  (функция предложения),

где  $a, b, r, n$ - положительные действительные числа. Таким образом, считая  $d_t = s_t$ , получаем линейное разностное уравнение  $a - bp_t = r + np_{t-1}$  первого порядка с постоянными коэффициентами.

**Задание 7.** Найдите последовательность цен  $p_t$  для  $t = 10, 100, 1000$  и равновесную цену в паутинной модели рынка  $a - bp_t = r + np_{t-1}$  при