

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Актуализировано:  
на заседании кафедры математического анализа  
протокол от «21» июня 2017 г. № 9

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Х.К. Ишкин

Согласовано:  
Председатель УМК факультета

\_\_\_\_\_ / А.М. Ефимов

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

дисциплина Целые функции  
(наименование дисциплины)

Цикл Б1.В.ДВ. 01.01 Дисциплины (модули), дисциплины по выбору  
(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)  
01.03.01 «Математика»

Направленность (профиль) подготовки  
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Квалификация  
бакалавр

Разработчик (составитель)  
Доцент, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_ / Кривошеева О.А.

Для приема: 2015 года

Уфа 2017 г.

Составитель / составители: О.А.Кривошеева

Рабочая программа дисциплины актуализирована на заседании кафедры математического анализа протокол от «21» июня 2017 г. № 9

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры математического анализа, протокол № 7 от «25» июня 2018 г.

Дополнен список литературы.

Заведующий кафедрой



/ Х.К. Ишкин

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	5
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	5
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	5
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	7
4.3. Рейтинг-план дисциплины	10
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	11
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	11
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	12

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения <sup>1</sup>		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знания	<b>Знать:</b> содержание материала по предмету, основные методы решения задач, основные теоремы преподаваемой дисциплины.	ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	
Умения	<b>Уметь:</b> решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету.	ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	
Владения (навыки / опыт деятельности)	<b>Владеть:</b> способностью корректно поставить задачу, классическими и современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета.	ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Целые функции» относится к части *Дисциплины по выбору*.

Дисциплина изучается на 3 курсе в 5 семестре.

Цель изучения дисциплины: углубление знаний студентов в области функций комплексного переменного, фундаментальная подготовка студентов в теории функций в комплексной области, овладение методами решения основных задач по теории функции комплексного переменного, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при изучении математических дисциплин и в приложениях.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Комплексный анализ», «Дифференциальные уравнения».

Дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как «Математический анализ», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Ряды Дирихле». Изучение дисциплины «Целые функции» содействует формированию глубокого понимания комплексного анализа и является серьезным толчком к изучению такой важной темы, как представление целых или аналитических функций в выпуклой области посредством рядов экспонент.

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код и формулировка компетенции

ПК-1 - способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		2 («Не удовлетворительно»)	3 («Удовлетворительно»)	4 («Хорошо»)	5 («Отлично»)

Первый этап (уровень)	<b>Знать:</b> содержание материала по предмету, основные методы решения задач, основные теоремы преподаваемой дисциплины	Отсутствие знаний	Частичные знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем преподаваемой дисциплины	Полные и четкие, но содержащие отдельные пробелы знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем преподаваемой дисциплины	Полные и четкие знания содержания материала по предмету, основных методов решения задач, основных теорем преподаваемой дисциплины
Второй этап (уровень)	<b>Уметь:</b> решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	Отсутствие умений	Фрагментарные умения решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы умения решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	Сформированное умение решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету
Третий этап (уровень)	<b>Владеть:</b> способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	Отсутствие владений	В целом успешные, но не систематические владения способностью корректно поставить задачу, классическим и современным и методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы владения способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	Успешные владения способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль

– максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

**4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	<b>Знать:</b> содержание материала по предмету, основные методы решения задач, основные теоремы преподаваемой дисциплины	ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	Контрольная работа, доклад на семинаре
2-й этап Умения	<b>Уметь:</b> решать задачи по преподаваемой дисциплине, определять корректность поставленной задачи, применять на практике знания по предмету	ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	Контрольная работа, доклад на семинаре
3-й этап Владеть навыками	<b>Владеть:</b> способностью корректно поставить задачу, классическими современными методами дисциплины, понятийным аппаратом предмета	ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	Контрольная работа, доклад на семинаре

**Экзаменационные билеты**

Структура экзаменационного билета:

Примерные вопросы для экзамен:

1. Порядок и тип целой функции.
2. Целые функции, не имеющие нулей.
3. Нули целой функции.

4. Бесконечные произведения. Функциональные бесконечные произведения.
5. Сходимость канонического произведения.
6. Представление целой функции в виде бесконечного произведения.
7. Оценка снизу многочлена.
8. Тип целой функции представленной в виде бесконечного произведения (Теорема Линделефа).
9. Определение индикатора и его свойства.
10. Принцип Фрагмена-Линделефа.
11. Опорная функция. Индикаторная диаграмма.
12. Индикатор целой функции с нулевым множеством нулевой плотности.
13. Построение целой функции с заданным индикатором.
14. Ассоциированная по Борелю функция. Сопряженная диаграмма.
15. Интегральное представление целой функции.
16. Теорема Поля.

Образец экзаменационного билета:

**ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»**  
**Факультет математики и информационных технологий**  
**Кафедра математического анализа**  
**Направление подготовки 01.03.01 «Математика»**  
**Экзаменационный билет № \_\_\_\_**  
**по дисциплине «Целые функции»**  
**(20\_\_ – 20\_\_ уч. год)**

1. Принцип Фрагмена-Линделефа. (20 баллов).
2. Найти порядок и тип функции  $f(z) = \sin z$ . (10 баллов).

**Зав. кафедрой**

**Х.К. Ишкин**

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);
- хорошо – от 60 до 79 баллов;
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

**Критерии оценки (в баллах):**

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;



**- 10-16** баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

**- 1-10** баллов выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### **Примерный список тем на семинары**

1. Нули целой функции.
2. Необходимый и достаточный признаки сходимости бесконечного произведения.
3. Достаточный признак равномерной сходимости бесконечного произведения в области и внутри области.
4. Последовательности с конечной верхней плотностью.
5. Оценка канонического произведения снизу вне кружков.
6. Теорема Картана.
7. Функции с нулевым множеством нулевой плотности.
8. Теорема М. Картрайт.
9. Следствия теоремы Линделефа.
10. Принцип Фрагмена-Линделефа.
11. Свойства выпуклых множеств.
12. Свойства опорной функции выпуклого компакта.
13. Свойства индикатора целой функции экспоненциального типа.

#### **Критерии оценки (в баллах):**

- 10 баллов выставляется студенту за полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и при верно данных ответах на дополнительные вопросы.

- 5-9 баллов выставляется студенту в случае, если студент сделал полный и развернутый доклад на семинаре на заданную тему и не ответил на 1-2 дополнительных вопроса, либо сделал неполный и/или нечеткий доклад, но при этом ответил на все дополнительные вопросы.

- 1-4 балла выставляется студенту в случае, если студент сделал неполный доклад на семинаре на заданную тему и не ответил ни на один дополнительный вопрос.

- 0 баллов выставляется студенту, если им не был сделан доклад на заданную тему.

### **Задания для контрольной работы**

#### **Описание контрольной работы:**

В семестре студенту представляется две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из четырех объемных заданий. Задача считается правильно решенной, если

студентом приведено подробное и полное ее решение. Каждое задание оценивается в 3 балла. В случае, если студент не справляется с более 50% заданий по обоим контрольным, он не допускается к сдаче экзамена. У каждого студента есть возможность пересдать контрольную работу.

Пример варианта контрольной работы:

### Контрольная работа №1.

1. Проверить, является ли функция  $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$  целой.
2. Найти максимум модуля функции:  
$$f(z) = \cos z.$$
3. Найти порядок и тип функции:  
$$f(z) = e^{\sin z}.$$
4. Найти представление в виде бесконечного произведения функции  
$$f(z) = \sin(z^2).$$

### Контрольная работа №2.

1. Найти опорную функцию множества  $M = [1,4]$ .
2. Найти индикатор роста целой функции  $f(z) = \cos z$ .
3. Найти функцию, ассоциированную по Борелю с целой функцией экспоненциального типа  
$$f(z) = \sin z.$$
4. Найти сопряженную диаграмму целой функции экспоненциального типа  
$$f(z) = \operatorname{sh} z.$$

Описание методики оценивания:

#### Критерии оценки (в баллах)

15 баллов выставляется студенту, если все задачи решены верно;

12 баллов выставляется студенту, если 3 задачи решены верно;

9 баллов выставляется студенту, если 2 задачи решены верно;

3 балла выставляется студенту, если 1 задача решена верно.

#### 4.3. Рейтинг-план дисциплины

Рейтинг-план дисциплины представлен в приложении 2.

## 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

#### Основная литература:

1. Кривошеева О. А., Кривошеев А.С., Абдулнагимов А.И. *Целые функции экспоненциального типа. Ряды Дирихле*. Монография. Уфа. РИЦ БашГУ. 2015. 196 с. (монография имеется в достаточном количестве в библиотеке БашГУ).
2. Гайсин А.М. *Целые функции: основы классической теории с приложениями к исследованиям по комплексному анализу*, 2-е изд. Уфа, РИЦ БашГУ. 2017. 160 с. (учебные пособия имеются в достаточном количестве в библиотеке БашГУ).

#### Дополнительная литература:

1. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций. Т. II*. М.: Наука, 1968. [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=439146&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=439146&sr=1)
2. Маркушевич А.И. *Очерки по истории теории аналитических функций*. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1951. [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=255676&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=255676&sr=1)
5. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ*. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=464254&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=464254&sr=1)
6. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976. [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=464238&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=464238&sr=1)
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 7-е изд. М.: Физматлит, 2012. [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=82563&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82563&sr=1)

### 5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

1. «Электронная библиотека БашГУ» <https://elib.bashedu.ru>
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.bashlib.ru/echitzal/>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>
4. Электронно-библиотечная система «Электронный читальный зал»

Специального программного обеспечения не требуется.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<i>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</i>	<i>Вид занятий</i>	<i>Наименование оборудования, программного обеспечения</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>Аудитория 517</i>	<i>Лекции, практические занятия</i>	<i>Компьютер, мультимедийный проектор, экран, доска.</i>
<i>Читальный зал №2 (физико-математический корпус)</i>	<i>Самостоятельная работа</i>	<i>Научный и учебный фонд, научная периодика, Wi-Fi доступ для мобильных устройств, неограниченный доступ к ЭБС и БД; количество посадочных мест – 50.</i>

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Целие функции  
(наименование дисциплины)

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	
лекций	36
практических/ семинарских	36
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем), ФКР	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	81
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	25,8

Формы контроля:  
экзамен 5 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР/СЕМ	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Определение и примеры целых функций. Порядок и тип целой функции. Целые функции, не имеющие нулей. Нули целой функции.	6	6	-	16	[1]: Гл.1, §1,2 [2]- [7]	[1]: Гл.1, §1,2 [6]: Гл.1, §1,2	Контрольная работа, доклад на семинаре
2.	Канонические произведения. Функциональные бесконечные произведения. Сходимость канонического произведения.	6	6	-	16	[1]: Гл.1, §3 [2]-[7]	[1]: Гл.1, §3 [6]: Гл.1, §3	Контрольная работа, доклад на семинаре
3.	Оценка канонического произведения снизу. Представление целой функции в виде бесконечного произведения. Оценка снизу многочлена. Тип целой функции,	8	8	-	16	[1] Гл.1, §4 [2]-[7]	[1]: Гл.1, §4 [6]: Гл.1, §3	Доклад на семинаре

	представленной в виде канонического произведения (Теорема Линделефа).							
4.	Индикатор целой функции экспоненциального типа. Его свойства. Принцип Фрагмена-Линделефа. Опорная функция. Индикаторная диаграмма. Построение целой функции с заданным индикатором.	8	8	-	16	[1]: Гл.1, §5 [2]-[7]	[1]: Гл.1, §5 [6]: Гл.1, §3	Контрольная работа, доклад на семинаре
5.	Ассоциированная по Борелю функция. Сопряженная диаграмма. Интегральное представление целой функции. Теорема Поля.	8	8	-	17	[1]: Гл.1, §6 [2]-[7]	[1]: Гл.1, §6 [6]: Гл.1, §2	Контрольная работа, доклад на семинаре
	<b>Всего часов:</b>	36	36	-	81			

## Рейтинг – план дисциплины

*Цели функции*

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Направление подготовки 01.03.01 Математика  
курс 3, семестр 1

Рейтинг-план (экзамен)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1. Порядок и тип. Канонические произведения.</b>				
<b>Текущий контроль</b>			<b>0</b>	<b>20</b>
Выступление на семинаре	<b>1</b>	<b>20</b>	<b>0</b>	<b>20</b>
<b>Рубежный контроль</b>				<b>15</b>
Контрольная работа №1	<b>3,75</b>	<b>4</b>		<b>15</b>
<b>Модуль 2. Оценка канонического произведения снизу. Тип целой функции, представленной в виде канонического произведения.</b>				
<b>Текущий контроль</b>			<b>0</b>	<b>20</b>
Выступление на семинаре	<b>1</b>	<b>20</b>	<b>0</b>	<b>20</b>
<b>Рубежный контроль</b>			<b>0</b>	<b>15</b>
Контрольная работа №2	<b>3,75</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>15</b>
<b>Поощрительные баллы</b>				
1. Студенческая олимпиада или конкурс рефератов			<b>0</b>	<b>5</b>
2. Волонтерская работа при проведении олимпиад и конференций			<b>0</b>	<b>5</b>
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
1. Посещение лекционных занятий			<b>0</b>	<b>-6</b>
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			<b>0</b>	<b>-10</b>
<b>Итоговый контроль</b>				
Экзамен			<b>0</b>	<b>30</b>
Итого			<b>45</b>	<b>100</b>