МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Актуализировано:
на заседании кафедры
протокол № 9 от 21.06.2017 г.

Зав. кафедрой ____________ /Ишкин Х.К.

Согласовано:
Председатель УМК
факультета математики и
информационных технологий

____________ /Ефимов А.М.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

дисциплина *Математический анализ*

Цикл Б1.Б дисциплины, базовая часть
(Цикл дисциплины и ее часть)

Программа бакалавриата

Направление подготовки (специальность)
01.03.01 «Математика»

Направленность (профиль) подготовки

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»,
«Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление»,
«Преподавание математики и информатики»

Квалификация
Бакалавр

Разработчик (составитель) зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент *должность, уч. степень, уч. звание*	____________ / Ишкин Х.К. *(подпись, ФИО)*

Для приема: 2016

Уфа — 2017

Составитель: зав. кафедрой матанализа, д.ф.-м.н. Ишкин Х.К.

Рабочая программа дисциплины актуализирована на заседании кафедры математического анализа протокол № 9 от «21» июня 2017 года

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры кафедры математического анализа:

- обновлен список литературы,
- обновлены фонды оценочных средств,
- обновлен необходимый комплект лицензионного программного обеспечения,
- обновлен перечень современных профессиональных баз данных (в том числе международных реферативных баз данных научных изданий) и информационных справочных систем, протокол № 7 от «25» июня 2018 года.

Заведующий кафедрой ____________ / Ишкин Х.К.

Содержание

1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы *(с ориентацией на карты компетенций)*

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
1	2	3	4
Знания	1. Знать: основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	ОПК–1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	2. Знать основные разделы математического анализа и их приложений, формулировки и доказательства основных понятий, определения и свойства объектов математического, функционального и действительного анализа, классические задачи анализа, методы решений таких задач, утверждения классических теорем анализа, применяемых для решения задач	ПК–3: способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	

1	2	3	4
Умения	1. Уметь доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины 2. Уметь применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	ОПК–1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	
	3. Уметь строго доказывать утверждение, формулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК–3: способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	
Владения (навыки/опыт деятельности)	1. Владеть навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	ОПК–1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	

1	2 2. Владеть навыками строгих доказательств утверждений, извлечения следствий из полученного результата 3. Владеть методами вещественного комплексного и функционального анализа для решения актуальных теоретических, естественнонаучных задач	3 ПК–3: способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	4

2 Цели и место дисциплины в структуре ООП ВО

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются:

- формирование математической культуры студентов;
- фундаментальная подготовка в области математического анализа;
- овладение современным аппаратом математического анализа для дальнейшего использования в других областях математики и дисциплинах естественно-научного цикла.

Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части цикла Б1 Дисциплины (модули). Дисциплина изучается на 1,2 курсах в 1 –4 семестрах.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: «Дискретная математика и математическая логика», «Алгебра», «Аналитическая геометрия».

Дисциплина «Математический анализ» относится к числу основных разделов современной математики. Знание математического анализа является важной составляющей общей математической культуры выпускника. Эти знания необходимы для освоения дисциплин: «комплексный анализ», «дифференциальные уравнения», «дифференциальная геометрия и топология», «функциональный анализ», «уравнения в частных производных», «теория вероятностей», «математическая статистика».

3 Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

4 Фонд оценочных средств

4.1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Процесс освоения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности.

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично

Первый этап (уровень)	Знать:основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	Фрагментарные представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	Неполные представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	Сформированные систематические представления об основных понятиях, определениях и свойствах объектов преподаваемой дисциплины, формулировках и доказательствах утверждений, приложениях к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания

Второй этап (уровень)	1. Уметь: доказывать утверждения и решать задачи преподаваемой дисциплины, применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	Фрагментарные представления о доказательствах утверждений, методах решения задач преподаваемой дисциплины, применении полученных навыков в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	В целом успешное, но не систематическое использование основных утверждений и методов преподаваемой дисциплины	В целом успешное, но содержащие отдельные пробелы, использование основных утверждений и методов математического анализа	Сформированное умение использовать основные утверждения и методы преподаваемой дисциплины
Третий этап (уровень)	Владеть навыками применения фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	Фрагментарное использование фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	В целом успешное, но не систематическое использование фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы, использование фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности	Успешное и систематическое использование фундаментальных знаний в области преподаваемой дисциплины в будущей профессиональной деятельности

ПК–3: способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата.

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично

Первый этап (уровень)	Знать основные разделы математического анализа и их приложений, формулировки и доказательства основных понятий, определения и свойства объектов математического анализа, классические задачи анализа, методы решений таких задач, утверждения классических теорем анализа, применяемых для решения задач	Фрагментарные представления об основных разделах математического анализа и их приложений, формулировках и доказательствах основных понятий, определениях и свойствах объектов математического анализа, классических задачах анализа, методах решений таких задач, утверждениях классических теорем анализа, применяемых для решения задач	Неполные представления об основных разделах математического анализа и их приложений, формулировках и доказательствах основных понятий, определениях и свойствах объектов математического анализа, классических задачах анализа, методах решений таких задач, утверждениях классических теорем анализа, применяемых для решения задач	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных разделах математического анализа и их приложений, формулировках и доказательствах основных понятий, определениях и свойствах объектов математического анализа, классических задачах анализа, методах решений таких задач, утверждениях классических теорем анализа, применяемых для решения задач	Сформированные систематические представления об основных разделах математического анализа и их приложений, формулировках и доказательствах основных понятий, определениях и свойствах объектов математического анализа, классических задачах анализа, методах решений таких задач, утверждениях классических теорем анализа, применяемых для решения задач

Второй этап (уровень)	Уметь строго доказывать утверждение, формулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Фрагментарное умение строго доказывать утверждение, формулировать результат, увидеть следствия полученного результата	В целом успешное, но не систематическое умение решать задачи математического анализа, формулировать и доказывать результат, увидеть следствия полученного результата	В целом успешное, но содержащие отдельные пробелы умение решать задачи математического анализа, формулировать и доказывать результат, увидеть следствия полученного результата	Сформированное умение решать задачи математического анализа, формулировать и доказывать результат, увидеть следствия полученного результата
Третий этап (уровень)	Владеть навыками строгих доказательств утверждений, извлечения следствий из полученного результата, методами вещественного анализа для решения актуальных теоретических, естественнонаучных задач	Фрагментарное владение навыками строгих доказательств утверждений, извлечения следствий из полученного результата, методами вещественного анализа для решения актуальных теоретических, естественнонаучных задач	В целом успешное, но не систематическое владение навыками строгих доказательств утверждений, извлечения следствий из полученного результата, методами вещественного анализа для решения актуальных теоретических, естественнонаучных задач	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками строго доказывать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Успешное и систематическое владение навыками строгих доказательств утверждений, извлечения следствий из полученного результата, методами вещественного анализа для решения актуальных теоретических, естественнонаучных задач

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

Экзамены:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- хорошо – от 60 до 79 баллов,
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов,
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Зачеты:

- зачтено – от 60 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- не зачтено – от 0 до 59 баллов.

4.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап	1. Знать основные понятия, определения и свойства объектов преподаваемой дисциплины, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, приложения к другим областям математического знания и к дисциплинам естественнонаучного содержания	ОПК-1	Контрольные работы, тесты
Знания	2. Знать основные разделы математического анализа и их приложений, формулировки и доказательства основных понятий, определения и свойства объектов математического анализа, классические задачи анализа, методы решений таких задач, утверждения классических теорем анализа, применяемых для решения задач	ПК-3	Контрольные работы, тесты

2-й этап	1. Уметь доказывать утверждения и решать задачи математического анализа, применять полученные навыки в других областях математического знания, дисциплинах естественнонаучного содержания	ОПК-1	Контрольные работы, тесты, коллоквиум
	2. Уметь решать задачи математического анализа, строго доказывать утверждение, формулировать результат, увидеть следствия полученного результата	ПК-3	Контрольные работы, тесты, коллоквиум
3-й этап	1. Владеть навыками применения фундаментальных знаний в области математического анализа в будущей профессиональной деятельности	ОПК-1	Контрольные работы, тесты
Владеть навыками	2.Владеть навыками строгих доказательств утверждений, извлечения следствий из полученного результата, методами вещественного, комплексного и функционального анализа для решения актуальных теоретических естественнонаучных задач	ПК-3	Контрольные работы, тесты

1. Рейтинг-план дисциплины

Рейтинг–план дисциплины представлен в приложении № 2.

2. Экзамен

А. Вопросы к экзаменам

- **I семестр**

1. Понятие множества. Парадокс Рассела. Операции над множествами. Отношения, отображения, функции. Мощность множества.
2. Аксиоматика множества вещественных чисел и некоторые общие свойства.

3. Аксиома полноты. Принцип верхней грани.
4. Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
5. Некоторые свойства натуральных чисел.
6. Рациональные и иррациональные числа. Иррациональность $\sqrt{2}$. Принцип Архимеда. Плотность рациональных чисел.
7. 2 модели множества вещественных чисел: геометрическая интерпретация и бдд.
8. Основные леммы анализа: Кантора о вложенных отрезках, Гейне – Бореля, Больцано – Вейерштрасса.
9. Счетность множества рациональных чисел. Некоторые свойства счетных множеств. Несчетность $[0, 1]$.
10. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. Предельный переход и неравенства
12. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Свойства предела, связанные с арифметическими операциями.
13. Предел монотонной последовательности.
14. Число e.
15. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано – Вейерштрасса.
16. Критерий Коши сходимости последовательности
17. Два определения предела функции и их эквивалентность.
18. Различные типы пределов. Примеры
19. Свойства пределов функции, связанные с арифметическими операциями.
20. Критерий Коши.
21. Б.б. и б.м. функции. О-символика. Связь между бм и бб функциями.
22. Свойства пределов, связанные с неравенствами.
23. Существование предела монотонной функции.
24. Непрерывность функции. Непрерывность результатов арифметических действий над непрерывными функциями.
25. Непрерывность сложной функции.
26. Существование и непрерывность функции, обратной к монотонной.
27. Теорема о точках разрыва монотонной функции.
28. Определение и непрерывность показательной функции.
29. Определение и непрерывность логарифмической функции, тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций.
30. Два замечательных предела.
31. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.

32. Теорема Коши о прохождении через нуль и о промежуточном значении.
33. 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса.
34. Равномерная непрерывность, Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
35. Производная. Геометрический смысл производной. Дифференцируемость и производная. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференциал.
36. Дифференцируемость и арифметические операции.
37. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
38. Дифференцируемость обратной функции.
39. Производные элементарных функций.
40. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
41. Точка локального экстремума. Лемма Ферма.
42. Теоремы Ролля, Лагранжа Следствия из теоремы Лагранжа.
43. Теорема Коши.
44. Правило Лопиталя (неопределенность $(\frac{0}{0})$ и $(\frac{\infty}{\infty})$).
45. Теорема Тейлора об остаточном члене в общей форме. Следствия из нее: остаточный член в форме Лагранжа и Коши.
46. Локальная формула Тейлора.
47. Формулы Тейлора для основных элементарных функций.
48. Приложения формул Тейлора: иррациональность числа , приближенные вычисления, вычисление "тонких"пределов.
49. Монотонность в точке и на интервале. Ее связь со знаком производной.
50. Смена знака функции при переходе через точку.
51. Достаточные условия экстремума.
52. Выпуклость функции на отрезке. Геометрическая интерпретация.
53. Достаточное условие выпуклости.
54. Точка перегиба. Необходимое условие перегиба.
55. Достаточные условия перегиба.
56. Асимптоты. Критерий существования наклонной асимптоты. Исследование функции и построение графика. Пример.

- **II семестр**

1. Первообразная. Теорема об общем виде первообразных. Неопределенный интеграл. Основные свойства.
2. Таблица неопределенных интегралов.
3. Основные методы интегрирования (метод подстановки и по частям).
4. Интегрирование рациональных дробей.

5. Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей.
6. Интегрирование дифференциального бинома.
7. Интегрирование нкоторых тригонометрических выражений.
8. Понятие о "неберущихся"интегралах.
9. Интегральные суммы, их геометрический смысл. Интегрируемость. Необходимое условие интегрируемости. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
10. Суммы Дарбу. Основные свойства. Верхние и нижние интегралы.
11. Критерий интегрируемости.
12. Интегрируемость непрерывной функции.
13. Интегрируемость почти всюду непрерывной функции.
14. Интегрируемость монотонной и ограниченной функции.
15. Интегрируемость сложной функции.
16. Свойства определенного интеграла: линейность и интегрируемость произведения.
17. Свойства определенного интеграла: аддитивность.
18. Оценки интегралов: монотонность. Интегрируемость модуля интегрируемой функции.
19. Теоремы о среднем значении. Следствия из нее.
20. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница.
21. Интегрирование по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
22. Замена переменной в определенном интеграле в случае, когда f - непрерывна.
23. Замена переменной в определенном интеграле в случае, когда f - интегрируема.
24. Критерий Лебега интегрируемости.
25. Понятие кривой. Длина дуги кривой. Корректность определения длины.
26. Формула для длины гладкой кривой.
27. Определение площади фигуры. Площадь криволинейной трапеции. Площадь сектора. Кубируемость. Кубируемость цилиндра. Объем тела вращения.
28. Множество $\mathbb{R}^n$ и метрика в нем. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Критерий замкнутости.
29. Компакты в $\mathbb{R}^n$. Компактность n - мерного параллелепипеда.
30. Т. Гейне – Бореля – Лебега.
31. Понятие функции многих переменных.
32. Последовательности точек в $\mathbb{R}^n$. Критерий Коши.
33. Т. Больцано - Вейерштрасса.

34. Два определения предела функции в Rn. Их эквивалентность. Повторные пределы.
35. Непрерывность функции в Rn. Основные свойства непрерывных функций в: арифметические свойства. непрерывность сложной функции, устойчивость знака непрерывной функции. Т. о промежуточном значении, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса.
36. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
37. Частные производные. Дифференцируемость. Существование частных произ-водных дифференцируемой функции. Дифференцируемость $\Rightarrow$ непрерывность. Дифференциал.
38. Достаточное условие дифференцируемости.
39. Дифференцируемость сложной функции.
40. Инвариантность формы первого дифференциала.
41. Частные производные высших порядков. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
42. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность их форм. Инвариантность в случае линейной зависимости.
43. Формула Тейлора для функций многих переменных.
44. Экстремум функций многих переменных. Необходимое условие экстремума.
45. Квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
46. Достаточные условия экстремума.
47. Достаточные условия экстремума в случае 2 переменных.
48. Наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных.
49. Понятие о неявной функции. Неявная функция 1 переменной.
50. Неявная функция многих переменных.
51. Неявные функции, заданные системой уравнений.
52. Т. об обратном отображении.
53. Условный экстремум. Сведение к безусловному экстремуму. Необходимые условия условного экстремума.
54. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
55. Достаточные условия условного экстремума. Пример.

- **III семестр**

1. Числовой ряд. Инвариантность сходимости относительно добавления (отбрасывания) конечно-го числа членов. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши.
2. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами. Признаки сравнения.
3. Признак Даламбера.
4. Признак Коши.

5. Соотношение между признаками Коши и Даламбера.
6. Интегральный признак Коши. Признак Раабе.
7. Абсолютная и условная сходимость. Примеры.
8. Теорема Римана о перестановке условно сходящегося ряда.*
9. Теорема Коши о перестановке абсолютно сходящегося ряда.
10. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Признак Лейбница.
11. Сходимость суммы и разности сходящихся рядов. Теорема Мертенса.
12. Бесконечные произведения. Необходимое условие сходимости. Связь с рядами.
13. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку. Аналогия с рядами. Примеры.
14. Несобственный интеграл от неотрицательной функции: критерий сходимости, признаки сравнения, частный признак сравнения.
15. Абсолютная и условная сходимость.
16. Признаки Абеля и Дирихле.
17. Замена переменных и интегрирование по частям.
18. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
19. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Главное значение в смысле Коши. Примеры.
20. Поточечная сходимость функциональных последовательностей. Примеры. Основные вопросы.
21. Равномерная сходимость. Равномерная сходимость n. Равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная сходимость. Контрпример. Критерий Коши.
22. Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
23. Признак Дирихле равномерной сходимости. Пример.
24. Признак Абеля равномерной сходимости.
25. Теорема о перестановке двух предельных переходов. Следствия из нее.
26. Интегрирование и предельный переход.
27. Дифференцирование и предельный переход.
28. Пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.*
29. Последовательность $\{\sin nx\}$ не сходится на $\{x \neq m, m \in \mathbb{Z}\}$.
30. Существование сходящейся подпоследовательности у равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности. Достаточный признак равностепенной непрерывности.
31. Степенные ряды. Пример степенного ряда, расходящегося всюду, кроме точки $x = 0$. Теорема Коши – Адамара.
32. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Поведение степенного ряда на границе интервала сходимости. Примеры.
33. Непрерывность суммы степенного ряда.

34. Почленное интегрирование, дифференцирование степенного ряда.
35. Разложимость функции в степенной ряд. Необходимое условие разложимости. Единственность разложения. Критерий разложимости.
36. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
37. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении.*
38. Семейство функций. Сходимость, равномерная сходимость. Два критерия равномерной сходимости.
39. Функциональные свойства семейства функций
40. Свойства собственного интеграла, зависящего от параметра: непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость
41. Непрерывность, дифференцируемость в случае зависимости пределов интегрирования от параметра.
42. Несобственные интегралы I рода, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле.
43. Непрерывность по параметру несобственных интегралов I рода.
44. Дифференцируемость и интегрируемость по параметру несобственных интегралов I рода.
45. Теорема Фубини.
46. Несобственные интегралы II рода, зависящие от параметра.
47. Вычисление интеграла Дирихле.
48. Вычисление интеграла Пуассона.*
49. Гамма - функция. Ее свойства. Бета - функция . Ее свойства. Связь между Г() и В(,).*
50. Формула Стирлинга*.
51. Л.н.п. Размерность. Примеры. $_0$ - л.н.п.
52. Неполнота пространства $_0$.
53. Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского.
54. Ортогональность. Теорема Пифагора. Ортонормированные системы. Примеры.
55. Ряды Фурье. Свойства отрезков Ряда Фурье. Неравенство Бесселя.
56. Замкнутые о.н.с. Критерий замкнутости.
57. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими много-членами.*
58. Замкнутость тригонометрической системы
59. Лемма Римана.
60. Интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье.
61. Свойства ядра Дирихле. Принцип локализации.*
62. Условие Дини. Поточечная сходимость ряда Фурье.

63. Условие Гельдера. Его соотношение с условием Дини.
64. Связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее коэффициентов Фурье. Условие равномерной сходимости ряда Фурье.
65. Определение и простейшие свойства преобразования Фурье.
66. Основная теорема - формула обращения.
67. Поведение на бесконечности функции, имеющей суммируемую производную. Связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье.
68. Связь между скоростью убывания функции и гладкостью ее преобразования Фурье.

- **IV семестр**

1. Основные леммы анализа (Кантора, Больцано - Вейерштрасса, Гейне - Бореля).
2. Предел функции в точке. Критерий Коши существования предела.
3. Свойства непрерывных функций одной и нескольких переменных (теоремы Коши о прохождении через нуль и о промежуточном значении).
4. Свойства непрерывных функций одной и нескольких переменных (I и II теоремы Вейерштрасса).
5. Равномерная непрерывность функций одной и нескольких переменных. Теорема Кантора.
6. Дифференцируемость функций одной и нескольких переменных. Связь между дифференцируемостью и существованием производной (соответственно частных производных).
7. Дифференциал функций одной и нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.
8. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
9. Формула Тейлора для функций одной и нескольких переменных.
10. Экстремум функции одной переменной. Необходимое и достаточные условия. Примеры.
11. Экстремум функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия.
12. Интеграл Римана. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций.
13. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши.
14. Признак Раабе. Интегральный признак сходимости.

15. Абсолютная и условная сходимость ряда. Признаки Абеля и Дирихле.

16. Несобственные интегралы. Признаки сравнения. Абсолютная и условная сходимость.

17. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

18. Функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

19. Функциональные последовательности и ряды. Непрерывность и предельный переход.

20. Функциональные последовательности и ряды. Дифференцируемость, интегрируемость и предельный переход.

21. Степенные ряды. Теорема Коши - Адамара.

22. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость по параметру.

23. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Критерий Коши.

24. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

25. Ряды Фурье по ортонормированным системам (о.н.с.) в евклидовых пространствах. Экстремальное свойство отрезков ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Критерий замкнутости о.н.с.

26. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной 2π - периодичной функции тригонометрическими многочленами.

27. Замкнутость тригонометрической системы.

28. Лемма Римана. Интегральное представление для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке.

29. Интеграл Римана по n-мерному промежутку. Необходимое условие интегрируемости.

30. Критерии Лебега (без доказательства) и Дарбу (с доказательством) интегрируемости по Риману.

31. Измеримые по Жордану множества. Их свойства.

32. Интеграл по множеству. Корректность определения. Критерий интегрируемости на измеримом множестве.

33. Мера Жордана. Критерий измеримости по Жордану.

34. Свойства интеграла (линейность, аддитивность, оценка интеграла).

35. Свойства интеграла (монотонность, теоремы о среднем).

36. Теорема Фубини. Следствия из нее.

37. Замена переменных в n-мерном интеграле (без доказательства). Пример.

38. Несобственный n- мерный интеграл. Несобственный интеграл от неотрицательной функции.

39. Признаки сравнения сходимости несобственных n- мерных интегралов.

40. Связь между сходимостью и абсолютной сходимостью.

41. Криволинейные интегралы I и II рода. Их сведение к обычному интегралу Римана.

42. Формула Грина.

43. Условие независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования. Признак полного дифференциала.

44. Понятие поверхности. Способы их задания.

45. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

46. Площадь явно заданной поверхности.

47. Площадь регулярной поверхности.

48. Независимость площади регулярной поверхности от способа параметризации.

49. Поверхностные интегралы I и II рода. Их сведение к двойным интегралам.

50. Формула Гаусса- Остроградского.

51. Ориентация кусочно-гладкой поверхности. Лемма о локальном однозначном проектировании.

52. Формула Стокса.

53. Производная по направлению. Градиент. Свойство градиента.

54. Дивергенция и поток векторного поля. Формула Гаусса-Остроградского в векторной форме. Независимость дивергенции от выбора системы координат. Гидромеханический смысл дивергенции.

55. Циркуляция и ротор векторного поля. Формула Стокса в векторной форме. Независимость ротора от выбора системы координат. Механический смысл ротора.

56. Соленоидальные (трубчатые) поля. Пример. Их свойства. Потенциальные и безвихревые поля. Их связь.

B. Образец экзаменационного билета

Структура экзаменационного билета: билет состоит из 2 вопросов, по 1 из каждой части, на которые условно делится прочитанный в течение семестра лекционный курс.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Экзаменационный билет № 1
по курсу «Математический анализ»

1. Лемма Больцано–Вейерштрасса.
2. Формула Тейлора.

Зав. кафедрой Ишкин Х.К. /______________/

C. Критерии оценки

- 25-30 баллов выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- 17-24 баллов выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- 10-16 баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- 1-10 баллов выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Посещение лекционных и практических (семинарских, лабораторных) занятий оценивается в суммах до 6 и 10 баллов со ответственно, однако эти баллы являются штрафными и вычитаются преподавателем из набранных студентами баллов в ходе текущего и рубежного контроля по следующей схеме:

- за пропуски лекционных занятий

  за 25 % пропусков вычитается 1 балл

  за 50 % пропусков вычитается 4 балла

  за 75 % пропусков вычитается 6 баллов

  за 100 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний

- за пропуски практических (семинарских, лабораторных) занятий

  за 20 % пропусков вычитается 2 балла

  за 40 % пропусков вычитается 5 баллов

  за 50 % пропусков вычитается 7 баллов

  за 75 % пропусков вычитается 10 баллов

  более 75 % пропусков – студент не допускается до итоговых испытаний.

Устанавливается следующая градация перевода оценки из 100-балльной в четырехбалльную:

Экзамены:

- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- хорошо – от 60 до 79 баллов,
- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов,
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Зачеты:

- зачтено – от 60 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- не зачтено – от 0 до 59 баллов.

Студент, набравший по итогам текущего и рубежного контроля менее 35 возможных баллов или пропустивший более 75 % практических (семинарских, лабораторных) занятий, до экзамена по данной дисциплине не допускается. В этом случае он изучает не освоенные им темы, выполняет соответствующие задания на платной основе в сроки, установленные деканатом для ликвидации задолженностей. Баллы, полученные таким образом, прибавляются к количеству баллов, набранных студентом в семестре.

3. Контрольные работы

Для рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов предусмотрено проведение 12 контрольных работ (КР): по 3 контрольные в каждом семестре. Каждая КР состоит из 5 задач.

А. Примерный вариант контрольной работы

1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n - 3^n}{3^n - n!}$.

2. Найти $M := \sup x_n$ и $m := \inf x_n$, если $x_n = 1 + 2\cos\dfrac{\pi n}{2}$.

3. Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}$.

4. Не применяя правило Лопиталя, найти пределы:

   а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$.

5. Исследовать функцию $f(x) = |\mathrm{sgn} x|$ на непрерывность, указать характер точек разрыва.

B. Критерий оценивания

За 1 задачу ставится:

- 4 балла, если задача решена полностью, в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок,
- 3 балла, если задача решена, но в обосновании шагов решения имеются пробелы, есть недочеты в выкладках, рисунках, чертежах или графиках,
- 2 балла, если приведены обязательные для решения данной задачи формулы, но допущены ошибки в их применении,
- 1 балл, если допущены существенные ошибки, показывающие отсутствие обязательных умений и навыков по данной теме,
- 0 баллов в случае вопиющего незнания изученного материала, отсутствия элементарных умений и навыков.

4. Коллоквиум

Для текущего контроля успеваемости студентов в I семестре предусмотрен коллоквиум.

A. Задачи к коллоквиуму

Задача 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $-X = \{-x,\ x \in X\}$. Доказать, что:

а)Если X ограничено сверху, то $-X$ ограничено снизу, и

$$\inf(-X) = \sup X$$

б) Если X ограничено снизу, то -X ограничено сверху, и

$$\sup(-X) = \inf X$$

Задача 2. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X + Y = \{x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$. Доказать, что:

а)Если X, Y ограничены сверху, то $X + Y$ ограничено сверху, и

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

б) Если X, Y ограничены снизу, то $X + Y$ ограничено снизу, и

$$\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y.$$

Задача 3. Доказать (по определению), что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Задача 4. Доказать (без применения критерия Коши), что если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Задача 5. Доказать , что если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

Задача 6. Доказать , что если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = +\infty.$$

Задача 7. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}},$$

если a – положительная постоянная.

Задача 8. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{3^n \cdot n}$$

Задача 9. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n}\right).$$

Задача 10. Доказать (по определению), что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Задача 11. Доказать, что последовательность $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ расходится.

Задача 12. Найти верхний и нижний пределы последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Задача 13. Доказать, что $\sqrt{x+\sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x},\ x \to +0$, и $\sqrt{x+\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},\ x \to +\infty$.

Задача 14. Найти функцию $g(x)$ вида $g(x) = C \cdot x^\alpha$, эквивалентную функции $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x+1}$ при $x \to a$, если $a = 0,\ a = \infty$.

Задача 15. Исследовать на ограниченность функцию $f(x) = \ln x \cdot \cos\dfrac{\pi}{x}$ в интервале $(0, 1)$.

Задача 16. Доказать по определению, что

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

Задача 17. Доказать по определению, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 18. Доказать , что

$$\lim_{x\to \infty} x^n = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 19. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}.$$

Задача 20. Найти

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+6x+5}+x\right).$$

Задача 21. Найти

$$\lim_{x\to \infty} (x+\cos x).$$

Задача 22. Исследовать на монотонность функцию

$$f(x) = \frac{2x+1}{5x-10}.$$

Задача 23. Найти $f^{-1}(x)$, если

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x & , & -\infty<x\leq 1 \\ x^2 & , & 1<x<\infty \end{array}\right.$$

Является ли функция $f^{-1}(x)$ монотонной и непрерывной?

Задача 24. Найти нижнюю и верхнюю грани множества

$$\left\{1+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Задача 25. Найти

$$S=\sup\left\{r,\ r\in\mathbb{Q}, r^2+2r<1\right\}.$$

Принадлежит ли S этому множеству?

Задача 26. Найти предельные точки множества

$$\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Задача 27. Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x-1}-ax-b\right)=0.$$

Задача 28. Доказать, что функция

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^4+1}$$

ограничена на $(-\infty,+\infty)$.

Задача 29. Исследовать на непрерывность и указать характер точек разрыва функции $y=$sgn(x^2+2x-8).

Задача 30. Исследовать на непрерывность и указать характер точек разрыва функции $f(x)=(-1)^{[x]}$.

Задача 31. Пусть $X,Y\subset\mathbb{R}_+,\ X\cdot Y=\{x\cdot y,\ x\in X,\ y\in Y\}$. Доказать, что если $X,\ Y$ ограничены сверху, то $X\cdot Y$ ограниченное множество, и

$$\sup(X\cdot Y)=\sup X\cdot\sup Y,$$

$$\inf(X\cdot Y)=\inf X\cdot\inf Y.$$

Задача 32. Доказать, что последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

сходится.

Задача 33. Пусть $\{x_n\}$ ограниченная, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательности. Доказать , что $\{x_n + y_n\}$ – бесконечно большая.

Задача 34. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

сходится и найти ее предел.

Задача 35. Доказать, что если $\{x_n\}$ – монотонна и содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Задача 36. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ монотонно стремится к 0 при $n \to \infty$, то последовательность

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k$$

сходится.

Задача 37. Доказать, что $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x),\ x \to 0$.

Задача 38. Доказать, что функция $y = \sin x + \sin x\sqrt{2}$ непериодична.

Задача 39. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - ln\ n,$$

сходится.

Задача 40. Доказать, что если $x_n > 0$ и существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

B. Вопросы

1. Понятие множества. Парадокс Рассела. Операции над множествами. Отношения, отображения, функции. Мощность множества.

2. Аксиоматика множества вещественных чисел и некоторые общие свойства.
3. Аксиома полноты. Принцип верхней грани.
4. Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
5. Некоторые свойства натуральных чисел.
6. Рациональные и иррациональные числа. Иррациональность $\sqrt{2}$. Принцип Архимеда. Плотность рациональных чисел.
7. 2 модели множества вещественных чисел: геометрическая интерпретация и бдд.
8. Основные леммы анализа: Кантора о вложенных отрезках, Гейне – Бореля, Больцано – Вейерштрасса.
9. Счетность множества рациональных чисел. Некоторые свойства счетных множеств. Несчетность $[0, 1]$.
10. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. Предельный переход и неравенства
12. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Свойства предела, связанные с арифметическими операциями.
13. Предел монотонной последовательности.
14. Число .
15. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано – Вейерштрасса.
16. Критерий Коши сходимости последовательности
17. Два определения предела функции и их эквивалентность.
18. Различные типы пределов. Примеры
19. Свойства пределов функции, связанные с арифметическими операциями.
20. Критерий Коши.
21. Б.б. и б.м. функции. О-символика. Связь между бм и бб функциями.
22. Свойства пределов, связанные с неравенствами.
23. Существование предела монотонной функции.
24. Непрерывность функции. Непрерывность результатов арифметических действий над непрерывными функциями.
25. Непрерывность сложной функции.

26. Существование и непрерывность функции, обратной к монотонной.

27. Теорема о точках разрыва монотонной функции.

С. Критерии оценки

- 8-10 баллов выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

- 6-7 баллов выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

- 3-5 баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

- 1-2 балла выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

5. Тесты

В каждом семестре предусмотрены по 6 тестирований: после каждого модуля тест по теории (текущий контроль) и тест по практике (рубежный контроль).

А. Критерии оценивания

Вид задания	Число заданий	Балл за 1 задание	Минимальная оценка	Максимальная оценка
1	2	3	4	5
Тест по теории (текущий контроль)				
Тест № 1	1	13	0	13
Тест № 2	1	13	0	13
Тест № 3	1	14	0	14
Тест по практике (рубежный контроль)				
Тест № 1	5	6	0	30
Тест № 1	5	6	0	30
Тест № 1	5	8	0	40

В. Примерный вариант тестов (за I семестр)

1. Тесты (теория)

Тест № 1

Задача 1. Указать верные определения:

а) Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной для множества $X \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой проколотой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества X,

б) Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной для множества $X \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества X,

в) Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной для множества $X \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек множества X,

г) Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной для множества $X \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества X, отличная от x_0.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), в), г); 3) а), г); 4) б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда

а) $\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ |x_n - a| < \varepsilon$;

б) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall\ n \geq N_\varepsilon\ |x_n - a| < \varepsilon$;

в) $\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ k_n\ |x_{k_n} - a| < \varepsilon$;

г) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ |x_{N_\varepsilon} - a| < \varepsilon$.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 3. Укажите верное определение:

а) $M = \sup X \iff \exists\ x \in X :\ x \leq M$ и $\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\ x \in X\ x > M - \varepsilon$;

б) $M = \sup X \iff \forall\ x \in X :\ x \leq M$ и $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X :\ x_\varepsilon > M - \varepsilon$;

в) $M = \sup X \iff \exists\ x \in X :\ x \leq M$ и $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in X :\ x_\varepsilon > M - \varepsilon$;

г) $M = \sup X \iff \forall\ x \in X :\ x \leq M$ и $\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\ x \in X\ x > M - \varepsilon$.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 4. Укажите верные утверждения:

а) Если $X \subset \mathbb{R}$ — ограничено, то оно имеет верхнюю и нижнюю грани;

б) Если $X \subset \mathbb{R}$ — ограничено снизу, то оно имеет верхнюю грань;

в) Если $X \subset \mathbb{R}$ — ограничено и не пусто, то оно имеет верхнюю и нижнюю грани;

г) Если $X \subset \mathbb{R}$ — не пусто и не имеет верхней грани, то оно неограничено сверху.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) в), г); 3) в); 4) а); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 5. Какое из утверждений а) — г) неверно?

а) Между любыми двумя вещественными числами существует хотя бы одно рациональное число;

б) Между любыми двумя вещественными числами существует бесконечное множество рациональных чисел;

в) Между любыми двумя вещественными числами существует хотя бы одно иррациональное число;

г) Между любыми двумя вещественными числами существует бесконечное множество иррациональных чисел. *Варианты ответа*: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 6. Укажите верные утверждения:

а) Любая стягивающаяся система отрезков имеет единственную общую точку;

б) Любая система вложенных отрезков имеет общую точку;

в) Любая система вложенных интервалов имеет общую точку;

г) Любая стягивающаяся система интервалов имеет единственную общую точку.

Варианты ответа: 1) а),б); 2) а), г); 3) а) — г); 4) в), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 7. Укажите верные утверждения:

а) Из любой системы отрезков, покрывающих отрезок, можно выделить конечную систему, покрывающую этот отрезок;

б) Из любой системы интервалов, покрывающих интервал, можно выделить конечную систему, покрывающую этот интервал;

в) Из любой системы отрезков, покрывающих интервал, можно выделить конечную систему, покрывающую этот интервал;

г) Из любой системы интервалов, покрывающих отрезок, можно выделить конечную систему, покрывающую этот отрезок.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 8. Укажите верные утверждения:

а) Если $K \subset \mathbb{R}$ — неограничен, то K не компактен;

б) Если $K \subset \mathbb{R}$ — не компактен, то K неограничен;

в) Если $K \subset \mathbb{R}$ — не компактен, то K незамкнут;

г) $K \subset \mathbb{R}$ — компактен тогда и только тогда, когда K ограничен и замкнут.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), в); 3) а), г); 4) в), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 9. Укажите неверные утверждения:

а) Любое ограниченное бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку;

б) Любое бесконечное множество имеет хотя бы одну (конечную или бесконечную) предельную точку;

в) Любое ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку;

г) Если ограниченное множество не имеет предельных точек, то оно конечно.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 10. Укажите неверные утверждения:

а) Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно;

б) Объединение счетного и несчетного множеств счетно;

в) Объединение счетного и несчетного множеств несчетно;

г) Если M — несчетно, N — счетно, то $M \setminus N$ — счетно.

Варианты ответа: 1) а), г); 2) в), г); 3) г); 4) б), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 11. Укажите неверные утверждения:

а) Последовательность сходится, если она ограничена;

б) Для сходимости последовательности необходима ее ограниченность;

в) Последовательность может иметь не более одного предела;

г) Неограниченная последовательность расходится.

Варианты ответа: 1) а), г); 2) а), в); 3) а), б); 4) б) — г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 12. Укажите верные утверждения:

а) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall\ n\ x_n > b$, то $a > b$;

б) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall\ n\ x_n \geq b$, то $a \geq b$;

в) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall\ n\ x_n > b$, то $a \geq b$;

г) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall\ n\ x_n \geq b$, то $a > b$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) в), г); 3) б), в); 4) а), б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 13. Укажите неверные утверждения:

а) Если $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — бесконечно малы, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}, \{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малы;

б) Если $\{a_n\}$ — бесконечно большая, то $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ — бесконечно мала;

в) Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно мала, то $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ — бесконечно большая;

г) Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно мала, $\{a_n\}$ — ограничена, то $\{\alpha_n \cdot a_n\}$ — бесконечно мала.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Тест № 2

Задача 1. Укажите верные утверждения:

Если $\alpha(x), \beta(x)$ — б.м., $A(x)$ — б.б. функции в точке a, $\gamma(x)$ — ограничена в окрестности точки a, то

а) $\alpha(x) \pm \beta(x), \alpha(x) \cdot \beta(x)$ — б.м. функции в точке a;

б) $\frac{1}{A(x)}$ — б.м. функция в точке a;

в) $\alpha(x) \cdot \gamma(x), \beta(x) \cdot \gamma(x)$ — б.м. функции в точке a;

г) $\frac{1}{\alpha(x)}, \frac{1}{\beta(x)}$ — б.б. функции в точке a.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), б); 3) а) — в); 4) а); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 2. Укажите верные утверждения:

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда если $\exists\ \overset{\circ}{O}(a) :\ \forall\ x \in \overset{\circ}{O}(a)$

а) $f(x) > g(x)$, то $A > B$;

б) $f(x) \geq g(x)$, то $A \geq B$;

в) $f(x) > B$, то $A > B$;

г) $f(x) \geq B$, то $A \geq B$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), в); 3) б), в); 4) б), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 3. Укажите неверные утверждения:

а) Если функция $f(x)$ не убывает на (a, b) и ограничена сверху, то предел $f(b-0)$ существует и конечен;

б) Если функция $f(x)$ не убывает на (a, b), то предел $f(b-0)$ (возможно, бесконечный) существует;

в) Если функция $f(x)$ ограничена на (a, b), то предел $f(b-0)$ существует и конечен;

г) Если функция $f(x)$ не убывает на (a, b) и неограничена сверху, то предел $f(b-0) = +\infty$.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 4. Какая из функций непрерывна на своей области определения?

а) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$;

б) $f(x) = \mathrm{sgn}|x|, \quad x \in \mathbb{R}$;

в) $f(x) = \sin x \cdot \mathrm{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R}$;

г) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) б); 3) б), в); 4) а), в), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 5. Укажите верные утверждения:

Если функции f, g непрерывны в точке a, то

а) $f \pm g$ непрерывны в точке a;

б) $f \cdot g$ непрерывны в точке a;

в) $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке a;

г) $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке a при дополнительном условии $g(a) \neq 0$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а)— в); 3) а), б), г); 4) а), б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 6. Укажите верные утверждения:

а) Если $\varphi(t)$ непрерывна в точке a, $f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, то $f(\varphi(t))$ непрерывна в точке a;

б) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$, предел $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t))$ существует и равен b.

в) $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и конечен,

2) $\exists \overset{\circ}{O}(t_0) : \forall t \in \overset{\circ}{O}(t_0)\ \varphi(t) \in D(f),\ \varphi(t) \neq x_0,$

3) $\varphi(t) \to x_0,\ t \to t_0.$

г) Если f непрерывна в точке a, то $|f|$ также непрерывна в точке a.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), в), г); 3) а),в); 4) а), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 7. Укажите верные утверждения:

а) Если функция f непрерывна и монотонна на $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$) определена функция f^{-1}, которая непрерывна и монотонна.

б) Если функция f непрерывна и возрастает (убывает) на $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ (соответственно на $[f(b), f(a)]$) определена функция f^{-1}, которая непрерывна и возрастает (соответственно убывает).

в) Если функция f определена на $[a, b]$ и монотонна, то она может иметь на $[a, b]$ не более счетного числа точек разрыва, которые могут быть только I рода.

г) Если функция f определена на $[a, b]$ и монотонна, то она может иметь на $[a, b]$ только конечное число точек разрыва, которые могут быть только I рода.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а) — в); 3) а), г); 4) б, в); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 8. Укажите верные утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1;$

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e;$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e.$

Варианты ответа: 1) б), г); 2) а), г); 3) б), в); 4) а), в); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 9. Укажите верные утверждения:

а) Если f непрерывна в точке a и $f(a) \geq 0$, то $\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in O_\delta(a) \cap D(f)\ f(x) \geq 0$;

б) Если f непрерывна в точке a и $f(a) > 0$, то $\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in O_\delta(a) \cap D(f)\ f(x) > 0$;

в) Если f определена на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists\, \xi \in (a, b) :\ f(\xi) = 0;$

г) Если f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists!\ \xi \in (a, b) :\ f(\xi) = 0;$

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) б), г); 3) а) — в); 4) б), в); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 10. Укажите верные утверждения:

а) Если f непрерывна на (a, b), то она ограничена на (a, b);

б) Если f непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$;

в) Если f непрерывна на $[a, b]$, то она достигает верхней и нижней граней;

г) Если f непрерывна на (a, b), то она достигает верхней и нижней граней.

Варианты ответа: 1) а),б), г); 2) в), г); 3) б); 4) а), б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 11. Укажите верные утверждения:

а) Если f непрерывна в точке a, то она дифференцируема в этой точке;

б) Если f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в этой точке;

в) Если f дифференцируема в точке a, то $f'(a)$ существует и конечна;

г) f дифференцируема в точке a, если существует касательная к графику f в точке $(a, f(a)$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) в), г); 3) б), в); 4) а, в), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 12. Укажите верные утверждения:

Если функции f, g дифференцируемы в точке a, то

а) $f \pm g$ дифференцируемы в точке a;

б) $f \cdot g$ дифференцируема в точке a;

в) $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a;

г) $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a, при дополнительном условии $g(a) \neq 0$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), б), г); 3) а) — в); 4) а, б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 13. Укажите верные утверждения:

Сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0, если

а) φ дифференцируема в точке t_0;

б) f дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$;

в) φ дифференцируема в точке t_0, f дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$;

г) f и φ дифференцируемы в точке t_0.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Тест № 3

Задача 1. Укажите верные утверждения:

а) Если $f'(x) \geq 0$ на (a, b), то f возрастает на (a, b);

б) Если $f'(x) > 0$ на (a, b), то f возрастает на (a, b);

в) Если f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b), то $f = \text{const}$ тогда и только тогда, когда $f' = 0$ на (a, b);

г) Если f дифференцируема на (a,b), то f' не может иметь точек разрыва I рода.

Варианты ответа: 1) б) — г); 2) в), г); 3) б), в); 4) а) — г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 2. Укажите верные утверждения:

а) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0, g' \neq 0$ на (a,b) и существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует и равен A.

б) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

в) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0, g' \neq 0$ на (a,b), то $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

г) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0, g' \neq 0$ на (a,b) и существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен A.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 3. Укажите верные утверждения:

а) Если $f^{(n)}$ определена и непрерывна на $[x_0, x]$ и дифференцируема в (x_0, x), то $\exists\ \xi \in (x_0, x):\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$;

б) Если f $n+1$ раз дифференцируема на (x_0, x), то $\exists\ \xi \in (x_0, x):\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$;

в) Если $f^{(n)}$ определена и непрерывна на $[x_0, x]$ и дифференцируема в (x_0, x), то $\exists\ \xi \in (x_0, x):\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$;

г) Если f $n+1$ раз дифференцируема на (x_0, x), то $\exists\ \xi \in (x_0, x):\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) б), г); 3) а), в); 4) а); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 4. Укажите верные утверждения:

а) Если f дифференцируема и возрастает в точке x_0, то $f'(x_0) > 0$;

б) Если $f'(x_0) > 0$, то f возрастает в точке x_0;

в) Если f дифференцируема в точке x_0, то f возрастает в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f'(x_0) > 0$;

г) Если f дифференцируема и возрастает в точке x_0, то $f'(x_0) \geq 0$.

Варианты ответа: 1) а), г); 2) б), г); 3) в), г); 4) а) — в); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 5. Укажите верные утверждения:

а) Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right),\ x_0$;

б) Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O\left((x-x_0)^n\right),\ x_0$;

в) Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O\left((x-x_0)^{n+1}\right),\ x \to x_0$;

г) Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^{n+1}\right),\ x \to x_0$.

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) а), в); 3) б), г); 4) а), б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 6. Укажите верные утверждения:

а) Если f дифференцируема на (a,b), то $\exists\, \xi \in (a,b):\ f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$;

б) Если f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема в (a,b), то $\exists!\ \xi \in (a,b)$: $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$;

в) Если f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то $\exists\ \xi \in (a,b)$: $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$;

г) Если f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в некоторой точке $\xi \in (a,b)$, то $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Варианты ответа: 1) а), г); 2) а), в), г); 3) в); 4) б); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 7. Укажите верные утверждения:

а) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty, g' \neq 0$ на (a,b) и существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует и равен A.

б) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty, g' \neq 0$ на (a,b) и существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен A.

в) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty, g' \neq 0$ на (a,b), то $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

г) Если функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{O}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Варианты ответа: 1) а); 2) б); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 8. Укажите верные утверждения:

Пусть f дифференцируема на (a,b). Тогда

а) если f возрастает на (a,b), то $f' > 0$ на (a,b);

б) если f возрастает на (a,b), то $f' \geq 0$ на (a,b);

в) если f не убывает на (a,b), то $f' \geq 0$ на (a,b);

г) если f не возрастает на (a,b), то $f' < 0$ на (a,b).

Варианты ответа: 1) а) — г); 2) в), г); 3) б), в); 4) а), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 9. Укажите верные утверждения:

а) Если f дифференцируема в точке x_0 и при переходе через x_0 меняет знак с - на $+$, то $f'(x_0) > 0$;

б) Если $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) > 0$, то f при переходе через x_0 меняет знак с - на $+$;

в) Если f дифференцируема в точке x_0, то f при переходе через x_0 меняет знак с - на $+$ тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) > 0$;

г) Если f дифференцируема в точке x_0 и при переходе через x_0 меняет знак с - на $+$, то $f'(x_0) \geq 0$.

Варианты ответа: 1) а), г); 2) в), г); 3) б), г); 4) а) — в); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 10. Укажите верные утверждения:

а) Если f, g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы в (a, b), то $\exists\ \xi \in (a, b) :$ $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$;

б) Если f, g дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то $\exists\ \xi \in (a, b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$;

в) Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то $\exists !\ \xi \in (a, b) :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$;

г) Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то $\exists\ \xi \in (a, b) :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Варианты ответа: 1) а), г); 2) а), в), г); 3) в); 4) г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 11. Укажите верные утверждения:

а) Если функция f дифференцируема в $\overset{\circ}{O}(x_0)$ и при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет свой знак с $+$ на -, то x_0 — точка строгого локального максимума;

б) Если функция f определена в $O(x_0)$, дифференцируема в $\overset{\circ}{O}(x_0)$ и при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет свой знак с - на $+$, то x_0 — точка строгого локального минимума;

в) Если функция f дифференцируема в $\overset{\circ}{O}(x_0)$ и при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет свой знак с - на $+$, то x_0 — точка строгого локального минимума;

г) Если функция f непрерывна в $O(x_0)$, дифференцируема в $\overset{\circ}{O}(x_0)$ и при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет свой знак с $+$ на -, то x_0 — точка строгого локального максимума.

Варианты ответа: 1) а), в); 2) б), г); 3) в), г); 4) а), г); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 12. Укажите верные утверждения:

а) Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума;

б) Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального максимума;

в) Если $f''(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума;

г) Если $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$, то x_0 не является точка строгого локального экстремума.

Варианты ответа: 1) а), в), г); 2) в), г); 3) в); 4) а); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 13. Укажите верные утверждения:

а) Если $f''(x) < 0$ на (a, b), то f выпукла вниз на (a, b);

б) Если $f''(x) < 0$ на (a, b), то f выпукла вверх на (a, b);

в) Если f дважды дифференцируема и выпукла вверх на (a, b), то $f''(x) \leq 0$ на (a, b);

г) Если f дважды дифференцируема и выпукла вниз на (a, b), то $f''(x) \leq 0$ на (a, b).

Варианты ответа: 1) б); 2) а), г); 3) б), в); 4) в); 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 14. Укажите верные утверждения:

а) Если $f''(x_0) = 0$, то x_0 — точка перегиба;

б) Если f дважды дифференцируема в точке x_0 и x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$;

в) Если f дважды дифференцируема в точке x_0, то x_0 — точка перегиба тогда и только тогда, когда $f''(x_0) = 0$.

Варианты ответа: 1) а) — в); 2) б); 3) в); 4) а); 5) ответы 1) — 4) неверны.

2. Тесты (практика)

Тест № 1

Задача 1. Найти $M := \sup X$ и $m := \inf X$, если $X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}$.

Варианты ответа: 1) $M = 2, m = 0$; 2) $M = \sqrt{2}, m = 0$; 3) $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$; 4) $M = 0, m = -\sqrt{2}$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 2. Найти все частичные пределы последовательности $\left\{\sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}$.

Варианты ответа: 1) 1,-1; 2) $\pm\sqrt{2}/2, 0$; 3) 0; 4) ±1,0; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 3. Найти $M := \sup x_n$ и $m := \inf x_n$, если $x_n = 1 + 2\cos\dfrac{\pi n}{2}$.

Варианты ответа: 1) $M = 3, m = 0$; 2) $M = 1, m = -1$; 3) $M = 3, m = -1$; 4) $M = 1, m = -1$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 4. Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}$.

Варианты ответа: 1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1,\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$; 2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1,\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$; 3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0,\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$; 4) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 5. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\cos(e^n)}{n-1}$.

Варианты ответа: 1) 1; 2) 0; 3) ∞; 4) не существует; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{n+1}}$.

Варианты ответа: 1) 1; 2) ∞; 3) 0; 4) $\sqrt{2}$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Тест № 2

Задача 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$.

Варианты ответа: 1) 1; 2) ∞; 3) e; 4) e^2; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Варианты ответа: 1) 1; 2) 0; 3) 5; 4) 10; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

Варианты ответа: 1) 1/2; 2) 3/2; 3) -3/2; 4) -1/2; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 4. Найти точки разрыва функции

$$f = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и указать их характер.

Варианты ответа: 1) 0 — I рода, неустранимая; 2) 0 — I рода, устранимая; 3) 0 — II рода, неустранимая; 4) 0 — II рода, устранимая; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 5. Найти точки разрыва функции

$$f = \begin{cases} \mathrm{arctg}(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и указать их характер.

Варианты ответа: 1) 0 — I рода, неустранимая; 2) 0 — I рода, устранимая; 3) 0 — II рода, неустранимая; 4) 0 — II рода, устранимая; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 6. Найти точки разрыва функции

$$f = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и указать их характер.

Варианты ответа: 1) 0 — I рода, неустранимая; 2) 0 — I рода, устранимая; 3) 0 — II рода; 4) 0 — II рода, устранимая; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Тест № 3

Задача 1. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Варианты ответа: 1) 1; 2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+1$; 4) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 2. Найти производную функции $y = 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$.

Варианты ответа: 1) $\cos x 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{1}{2}\cos x 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$; 3) $\sin x 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$; 4) $\frac{1}{2}\sin x 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 3. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$.

Варианты ответа: 1) $\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 2x}$; 2) $\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{2\sin^2 2x}$; 3) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin^2 2x}$; 4) $\dfrac{2}{\sin 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 2x}$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 4. Найти дифференциал функции $y = \ln\dfrac{\cos x + x\sin x}{\sin x - x\cos x}$.

Варианты ответа: 1) $dy = \dfrac{x^2}{2(1-x^2)\sin 2x + x\cos 2x)}dx$; 2) $dy = \dfrac{x^2}{2(1+x^2)\sin 2x + x\cos 2x)}dx$; 3) $dy = \dfrac{x^2}{2(1-x^2)\sin 2x - x\cos 2x)}dx$; 4) $dy = \dfrac{x^2}{2(1-x^2)\sin 2x - x\cos 2x)}dx$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 5. Используя правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

Варианты ответа: 1) ∞; 2) 0; 3) 1; 4) -1; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 6. Используя правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 1; 3) 1/2; 4) ∞; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 7. Разложить функцию $f = \operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора до $o(x^4)$.

Варианты ответа: 1) $f(x) = x - x^3/3 + o\,(x^4)$; 2) $f(x) = x + x^3/2 + o\,(x^4)$; 3) $f(x) = x - x^3/2 + o\,(x^4)$; 4) $f(x) = x + x^3/2 + o\,(x^4)$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

Задача 8. Найти главную часть вида Cx^α при $x \to 0$ функции $f = \sqrt{1-2x+x^2} + x - 1$.

Варианты ответа: 1) $2x^3$; 2) $2x$; 3) $2x^2$; 4) $3x^3$; 5) ответы 1) — 4) неверны.

B. Критерии оценивания

Правильный ответ на каждое тестовое задание оценивается в 1 балл.

6. Курсовая работа

В 4-м семестре запланирована курсовая работа.

А. Примерные темы курсовых работ

1. **Константа Эйлера** Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

сходится и

$$0 < \lim_{n\to\infty} x_n < 1.$$

Литература: [2d, п. 367].

П р и м е ч а н и е. Число $\gamma := \lim_{n\to\infty} x_n$ было введено в 1735 г. Л. Эйлером и в его честь теперь называют константой Эйлера. До сих пор не доказано, является ли это число рациональным. Имеется обстоятельный обзор (Jeffrey C. Lagarias. *Euler's constant: Euler's work and modern developments* // Bulletin Amer. Math. Soc. 50 (2013), No.4, 527-628) работ, посвященных константе Эйлера. Его можно скачать из ArXiv'a: `https://arxiv.org/abs/1303.1856`.

2. **Теорема Штольца.** Доказать:

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – последовательности вещественных чисел, причем $\{y_n\}$ положительна, неограничена и возрастает (хотя бы начиная с некоторого номера). Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},$$

то предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

также существует и равен A.

Литература: [1d, п. 33].

3. Доказать, что если для положительной последовательности $\{a_n\}$ выполнено условие
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$
то для любого $\varepsilon > 0$
$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right), n \to \infty;$$
причем если $\alpha > 0$, то последовательность $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера, убывая, стремится к 0.

Литература: [5d, №2606(н)]

4. **О-символика. Асимптотика Г-функции Эйлера**

   (a) О-символика, эквивалентность. Простейшие свойства.

   (b) Доказать асимптотическую формулу
$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{1}{12}x^{-1} + O\left(x^{-2}\right)\right).$$

   Литература: [1, § 3.5], [?, с. 624].

5. **Приближение интегрируемой функции непрерывными**

   Доказать, что если функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$), то существует такая последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций $\{f_n\}_1^\infty$, что $\forall\ c \in$[a;b]
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

   У к а з а н и е. Воспользоваться критерием Дарбу интегрируемости по Риману. Литература: [?, с. 348].

6. **Непрерывность в среднем интегрируемой функции**

   Доказать утверждение: если функция f интегрируема на отрезке [a;b], то она обладает свойством *интегральной непрерывности*
$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0,$$
   где f считается равной 0 вне отрезка [a;b]. Верно ли это утверждение в случае, когда функция f неограничена на [a;b]и интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится?

7. **Асимптотика интеграла от быстроосциллирующей функции**

   (a) Доказать, что функция $f(x) = \int\limits_x^{x+1} \sin t^2 dt$ при $x \to \infty$ имеет асимптотику
$$f(x) = \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

   (b) Найти $\varliminf\limits_{x\to\infty} xf(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

8. **Обобщение теоремы Ролля для функций многих переменных:**

   если функция f непрерывна в замкнутом шаре $\overline{B}(0,r)$, равна нулю на его границе и дифференцируема во внутренних точках шара $B(0,r)$, то по крайней мере одна из внутренних точек этого шара является критической точкой f.

9. **Обобщение теоремы Ролля на бесконечный промежуток**

   Если функция f

   (a) дифференцируема на конечном или бесконечном интервале (a,b) и существуют равные конечные или одного и того же знака бесконечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$, то существует точка $\xi \in (a,b):\ f'(\xi)=0$ *обобщение теоремы Ролля*;

   (b) удовлетворяет на [a;b]всем условиям теоремы Ролля и не является постоянной, то существуют $\xi_1, \xi_2 \in (a,b):\ f'(\xi_1)<0,\ f'(\xi_2)>0$.

10. **К теореме Мертенса**

    Выяснить, насколько необходимы условия теоремы Мертенса для сходимости произведения рядов:

    (a) показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ есть ряд расходящийся;

    (b) доказать, что произведение двух сходящихся рядов

    $$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}(\alpha>0) \text{ и } \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}(\beta>0)$$

    сходится, если $\alpha+\beta>1$ и расходится при $\alpha+\beta<1$;

    (c) проверить, что произведение двух расходящихся рядов

    $$1-\sum_1^\infty \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ и } 1+\sum_1^\infty \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

    сходится абсолютно.

11. **Теорема типа Штурма.**

    Пусть на отрезке [a;b]задана дважды дифференцируемая функция f.

    (a) доказать, что если f имеет бесконечное число нулей и отлична от тождественного 0, то существует общий нуль функций f, f', f'';

    (b) доказать, что если число нулей f конечно и $f''(x)=e^x f(x),\ x\in[a,b]$, то функция f не может иметь на отрезке [a;b]более одного нуля.

12. **Абсолютная непрерывность интеграла**

    Доказать утверждение: если функция f интегрируема на [a;b], то функция $F(x)=\int\limits_a^x |f(t)|dt$ *абсолютно непрерывна на [a;b]*, то есть $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0:$ $\forall\ [\alpha,\beta]\subset[a;b]\ \ (\beta-\alpha<\delta) \Rightarrow \left(\int\limits_\alpha^\beta |f(t)|dt<\varepsilon\right)$.

13. **Об асимптотическом среднем**

Доказать, что если f непрерывна на $[0,\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$, то

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{1}$$

существует и равен a.

Построить такую непрерывную на $[0,+\infty)$ функцию, для которой предел (1) существует, а предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует.

14. **Об одной теореме Тауберова типа**

Пусть функция fположительна и не убывает на $[1,\infty)$ и пусть $\int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}dt \sim x,\ x\to+\infty$. Тогда $f(x)\sim x,\ x\to+\infty$.

15. **Пределы функциональных последовательностей**

а) Доказать, что если f непрерывна и неотрицательна на [a;b], $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{1/n}=M.$$

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)dx$, если функция f непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

16. **О суммах арифметической и геометрической прогрессий.**

У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

17. **Об одном обобщении теоремы Дарбу**

Доказать, что если функция f дважды дифференцируема на $(x_0,+\infty)$ и

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

то $\exists\ \xi\in(x_0,+\infty):\ \ f''(\xi)=0.$

У к а з а н и е. Доказать, что $\exists\ \xi_1,\ \xi_2\in(x_0,+\infty):\ f''(\xi_1)<0<f''(\xi_2)$. Далее применить теорему Дарбу [**?**, с. 240] к функции f' на $[\xi_1,\xi_2]$ (или $[\xi_2,\xi_1]$).

18. **Некоторые свойства гладких функций**

(a) Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Доказать, что существует $\xi:\ f'(\xi)=0$.

(b) Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b) и для любых точек $x_1,x_2\in(a,b)$ справедливо неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|\le|x_2-x_1|^\alpha$, где $\alpha>1$. Доказать, что $f\equiv\text{const}$.

19. **Об оценках для функций с положительными производными**

    Пусть функция f такова, что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $f^{(k)}(x) > 0,\ k = \overline{0,3}$. Доказать, что существует число $a > 0$, такое, что $f(x) > ax^2$ при всех $x > 0$.

20. **Об одной теореме вложения**

    Пусть $f \in C^{(2)}[0,1],\ f(0) = f(1) = 0$, и пусть $M = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f''(x)|$. Доказать, что $|f'(x)| \le M/2$ при $x \in [0,1]$.

21. **Об оценке для промежуточной производной**

    Пусть функция f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$ и пусть $M_k = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty, k = 0,1,2$. Доказать, что $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$.

B. Критерии оценки

«отлично» – если:

- курсовая работа выполнена, тема курсовой работы полностью раскрыта,
- охвачен весь круг вопросов по теме курсовой,
- приведено достаточное количество примеров,
- использован обширный список литературных источников;

«хорошо» – если:

- курсовая работа выполнена,
- тема курсовой работы полностью раскрыта,
- охвачен весь круг вопросов по теме курсовой,
- приведено недостаточное количество примеров,
- использован малый список литературных источников;

«удовлетворительно» – если

- курсовая работа выполнена,
- тема курсовой работы не полностью раскрыта,
- охвачен не весь круг вопросов по теме курсовой,
- приведено недостаточное количество примеров,
- использован малый список литературных источников;

«неудовлетворительно» – если курсовая работа не выполнена.

5 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

5.1 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

[1] Ишкин, Х.К. Лекции по математическому анализу. Ч.1 [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Х.К. Ишкин; Башкирский государственный университет. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/read/Ishkin_Lekciipomatem_ch1_Uch.pos_2012.pdf.

[2] Ишкин, Х.К. Лекции по математическому анализу. Ч.2 [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Х.К. Ишкин; Башкирский государственный университет. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/read/Ishkin_Lekciipomatem_ch2_Uch.pos_2012.pdf.

[3] Ишкин, Х.К. Лекции по математическому анализу. Ч.3 [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Х.К. Ишкин; Башкирский государственный университет. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/read/Ishkin_Lekciipomatem_ch3_Uch.pos_2012.pdf.

[4] Ишкин, Х.К. Лекции по математическому анализу. Ч.4 [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Х.К. Ишкин; Башкирский государственный университет. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/read/Ishkin_Lekciipomatem_ch4_Uch.pos_2012.pdf.

[5] Функции одной переменной [Электронный ресурс]: методические указания и задания к контрольным работам / БашГУ ; сост. Х. К. Ишкин, Д. Г. Латыпов. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2011. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/corp/IshkinLatypovFunktsOdnoyPerem.pdf.

[6] Функции одной переменной [Электронный ресурс]: методические указания и задания к контрольным работам / БашГУ ; сост. Х. К. Ишкин, Д. Г. Латыпов. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2011. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/corp/IshkinLatypovFunktsOdnoyPerem.pdf.

[7] Примерный минимум умений, навыков и знаний по математическому анализу [Электронный ресурс]: методические указания и тесты для проверки уровня остаточных знаний за I семестр / БашГУ; сост. Х. К. Ишкин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/corp/IshkinPrimMinOstatZnan-1.pdf.

[8] Примерный минимум умений, навыков и знаний по математическому анализу [Электронный ресурс]: методические указания и тесты для проверки уровня остаточных знаний за II семестр / БашГУ; сост. Х. К. Ишкин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/corp/IshkinGubaidullinPrimMinOstatZnaniy.pdf.

[9] Примерный минимум умений, навыков и знаний по математическому анализу [Электронный ресурс]: методические указания и тесты для проверки уровня остаточных знаний за III семестр / БашГУ; сост. Х. К. Ишкин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/corp/IshkinPrimMinOstatZnan-3.pdf.

[10] Примерный минимум умений, навыков и знаний по математическому анализу [Электронный ресурс]: методические указания и тесты для проверки уровня остаточных знаний за IV семестр / БашГУ; сост. Х. К. Ишкин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. — Электрон. версия печ. публикации. — Доступ возможен через Электронную библиотеку БашГУ. — https://elib.bashedu.ru/dl/corp/IshkinPrimMinOstZnan-4.pdf.

Дополнительная литература

[1d] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 608 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/100938. — Загл. с экрана.

[2d] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2 [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 800 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/104963. — Загл. с экрана.

[3d] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3 [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 656 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/409. — Загл. с экрана.

[4d] И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2-х частях : учеб. пособие для студентов ун-тов и пед. вузов; под ред. В. А. Садовничего .— М. : Дрофа, .— (Высшее образование) (Современный учебник) . Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление .— Изд. 3-е, испр. — 2001 .— 725 с. : ил. — ISBN 5710742945 : 160 р. : 169 р. 50 к. — ISBN 5710742961. http://ecatalog.bashlib.ru/cgi-bin/zgate.exe?present+1500+default+8+1+F+1.2.840.10003.5.102+rus

[5d] Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б.П. Демидович. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 624 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/99229. — Загл. с экрана.

5.2 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины

А. Ресурсы «Интернет»

1	Электронно-библиотечная система «ЭБ БашГУ»	Собственная электронная библиотека учебных и научных электронных изданий, которая включает издания преподавателей БашГУ	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация в Библиотеке БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	https://elib.bashedu.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Университетска я библиотека online»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети Интернет	http://www.biblioclub.ru
3	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»	Полнотекстовая БД учебных и научных электронных изданий	Авторизованный доступ по паролю из любой точки сети Интернет	Регистрация из сети БашГУ, дальнейший доступ из любой точки сети	http://e.lanbook.com

B. Программное обеспечение, необходимое для освоения дисциплины

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные.
2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.
3. Система централизованного тестирования БашГУ (Moodle). Универсальная общественная лицензия GNU.

6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	**Вид занятий**	**Оборудование**	**Программное обеспечение**
1	2	3	4
Аудитории 502, 528, 530	Лекция	Учебная мебель, доска настенная меловая	
Аудитории 502, 503, 526, 527, 530	Лабораторное, практическое занятия	Учебная мебель, доска настенная меловая	
Аудитория 524	Выполнение курсовых работ, тестирование	Учебная мебель, доска настенная меловая, коммутатор HP V1905-24 Switch 24*10/100+2*10/100/1000, персональный компьютер в комплекте HP AiO 20"CQ 100 eu – 27 шт., экран ScreeMediaGolgview 274*206 NW 4:3, универсальное потолочное крепление ScreeMedia для проектора, регулировка высоты , шкаф TLKTWP-065442-G-GY, патч-корд (1296), доска аудитор. ДА32	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные. 3. Система централизованного тестирования БашГУ (Moodle). Универсальная общественная лицензия GNU.
Аудитория 531	Лекции, лабораторное, практическое занятия, тестирование	Учебная мебель, доска настенная меловая, мультимедиа-проектор Sony VPL-EX120, XGA, 2600 ANSI, 3,2 кг, потолочное крепление для проектора (2101068302), доска аудитор. ДА32	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.
читальный зал №2 (физико-математический корпус)	Самостоятельная работа, выполнение курсовой работы	Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, стенд по пожарной безопасности, моноблоки стационарные – 8 шт, принтер – 1 шт., сканер – 1 шт.	1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные. 2. Microsoft Office Standard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.

Приложение № 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины *Математический анализ* на I семестр

очная

форма обучения

Вид работы	**Объем дисциплины**
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	6 /216
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	127.4
лекций	54
практических / семинарских	0
лабораторных	72
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1.4
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	44.8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	43.8

Форма(ы) контроля:
экзамен I семестр
зачет I семестр

№№	Тема и содержание	Форма изучения материалов				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам	Задания для самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		Лк	ПЗ/Сем	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Элементы теории множеств. Отображения и функции.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[1, 1d, 4d, 5d]	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
2	Графики элементарных функций.	0	0	2	1	[1, 1d, 4d, 5d]	[4d]: 253, 258, 317, 310	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
3	Аксиомы вещественных чисел. Операции на $\mathbb{R}$. Алгебраические свойства вещественных чисел.	1	0	2	4	[1, 1d, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	Подмножества $\mathbb{R}$, их мощность. Принцип математической индукции.	3	0	2	1	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 11-16	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
5	Аксиома Архимеда. Плотность рациональных чисел. Геометрическая интерпретация вещественных чисел, бесконечные десятичные дроби.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
6	Основные леммы анализа.	3	0	2	1	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 11-16	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
7	Предел числовой последовательности и его свойства.	2	0	4	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 86, 87, 90, 127, 129, 130	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
8	Бесконечно малые и бесконечно большие. Арифметические операции над пределами. Критерий Коши.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 70, 72, 74, 76, 145-147, 121-123, 131-135	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
9	Предел функции в точке. Различные определения и их эквивалентность. Примеры.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 235, 236, 641, 643, 644	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	Свойства пределов. Арифметические операции над пределами.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 408-410, 428, 452-454, 469, 470	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
11	1-й и 2-й замечательный пределы.	2	0	6	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 402, 417, 418, 421, 423,	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
12	Критерий Коши существования предела.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 430, 432, 435	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
13	Классификация бесконечно малых и бесконечно больших. Символы «O», «o»	2	0	2	1	[1, 1d, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
14	Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.	2	0	2	1	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 473, 77, 78, 79, 83, 92, 96, 98, 502.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
15	Арифметические операции над непрерывными функциями. Суперпозиция непрерывной функции.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 672, 674, 736, 744-63, 745, 754	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
16	Свойства непр. функций на отрезке.	4	0	2	1	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 736, 744-63, 745	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	678, 79, 81, 82, 90, 98, 703, 17, 29.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
18	Монотонные функции (мф). Точки разрыва мф. Теорема существование и непр. обратной функции.	2	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 754	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
19	Задачи, приводящие к понятию производной (п.). П. элементарных функций.	1	0	2	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1075, 1063.2, 1074	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
20	Производная обратной функции. Производная суммы, суперпозиции функций.	2	0	4	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 928, 35, 37, 53, 67, 77, 84, 925, 32, 60, 66.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
21	Производные высших порядков. Формула Лейбница.	2	0	4	1	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1180-87, 1231-32	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
22	Дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем.	2	0	4	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1112, 1140, 1158, 1160, 65.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
23	Раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя. Формула Тейлора.	4	0	6	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1411-13, 1395.1,	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	Условия постоянства и монотонности функции.	2	0	4	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1414, 16, 32, 33, 37, 45, 46, 1300.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
25	Выпуклость и точки перегиба. Вертикальные и наклонные асимптоты кривой.	2	0	4	2	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1477, 89, 94, 79.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
26	Построение графика функции.	1	0	2	4.8	[1, 1d, 4d, 5d]	[5d]: 1459, 1460, 1533, 1549, 1550	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
	Всего часов	54	0	72	44.8			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины *Математический анализ* на II семестр

очная

форма обучения

Вид работы	**Объем дисциплины**
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	7 /252
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	129.4
лекций	64
практических / семинарских	0
лабораторных	64
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1.4
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	69.8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	52.8

Форма(ы) контроля:
экзамен II семестр
зачет II семестр

№№	Тема и содержание	Форма изучения материалов				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам	Задания для самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		Лк	ПЗ/Сем	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1569, 70, 1320, 24, 31, 36.	Д/р, к/р, зачет, экз
28	Замена переменной. Интегрирование по частям.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1629, 1673.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
29	Интегрирование простых дробей.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1791, 92, 96, 95, 98, 1803, 04, 10, 17, 21, 23	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	Интегрирование рациональных функций.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1698, 1763, 74, 84, 88, 90.	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз
31	Интегрирование иррациональных функций.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1704, 09, 15, 70.	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз
32	Интегрирование биномиальных дифференциалов.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1866, 69, 71, 73, 76, 77.	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз
33	Задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Определение суммы Дарбу и ее свойства.	4	0	4	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1926, 29, 30, 33, 34.	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз
34	Интегрируемость. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций.	6	0	6	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1084, 85, 87, 88, 92, 97	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз
35	Свойства определенных интегралов.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2008, 10, 14, 27, 28, 36.	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз
36	Определенный интеграл как функция верхнего предела.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2127, 34, 36, 39.	Проверка д/р, коллм, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
37	Основная формула интегрального исчисления. Замена переменной. Интегрирование по частям.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2143, 45, 47, 51, 52, 54, 59, 63, 67, 80.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
38	Приближенное вычисление определенных интегралов.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2244, 40, 72, 82, 83, 99.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
39	Понятие площади плоской фигуры и выражение ее интегралом.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2398, 99, 2400, 18.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
40	Понятие объема тела и выражение его интегралом.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2456, 62, 74, 2519, 20	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
41	Длина дуги кривой и ее вычисление.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2432, 34, 44, 46, 86, 88.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
42	Площадь поверхности тела вращения.	2	0	2	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 2508, 13, 21, 2626, 27, 30, 45.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
43	Вычисление статических моментов и координат центра тяжести кривой, плоской фигуры.	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	Понятие функций нескольких переменных. Предельное значение функции. Непрерывность .	2	0	2	2	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1478, 1479, 1481, 1485. 1500, 1527, 1519, 1509, 1512. 1376, 1381, 1383, 1387	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
45	Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференцируемость сложных функций. Производные и дифференциалы высших порядков	6	0	6	4	[1d, 2, 4d, 5d]	[5d]: 1394, 1396, 1398, 1401. 1766, 1772, 1775, 1778, 1792, 1799, 1805, 1816, 1830.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
46	Формула Тейлора.	4	0	1	2	[1d, 2, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
47	Экстремум функций нескольких переменных.	4	0	4	4	[1d, 2, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
48	Неявные функции.	4	0	4	4	[1d, 2, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	Условный экстремум	4	0	4	3.8	[1d, 2, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
	Всего часов	64	0	64	69.8			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины *Математический анализ* на III семестр

очная

форма обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	7 /252
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	163.4
лекций	72
практических / семинарских	36
лабораторных	54
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1.4
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	44.8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	43.8

Форма(ы) контроля:
экзамен III семестр
зачет III семестр

№№	Тема и содержание	Форма изучения материалов				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам	Задания для самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		Лк	ПЗ/Сем	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	Числовые ряды. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.	2	2	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d] 2546-49, 2551-53, 2556-60, 2562-71	Проверка д/р, к/р, зачет, экз
51.	Абсолютная и условная сходимость. Теоремы Римана и Коши.	4	2	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2573-76, 78-80, 85-90, 95, 98, 2603, 07, 12, 19, 20, 26, 29-32,	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
52.	Признаки сходимости знакопеременных рядов.	4	2	3	2	[2d, 3, 4d, 5d]	2665, 66.1, 67-71, 75-78, 82, 83, 86, 89	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
53.	Арифметические операции над рядами. Теорема Мер-тенса.	2	2	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
54.	Бесконечные произведения. Их связь с рядами	2	0	1	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
55.	Несобственные интегралы (НИ) по бесконечному промежутку. Признаки сходимости НИ от неотрицательных функций.	4	2	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2334-45, 2358-65, 2369-71	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
56.	Абсолютная и условная сходимость НИ. Признаки Абеля и Дирихле.	2	2	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2367, 68, 78-82, 84, 86, 87	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
56.	Замена переменных и интегрирование по частям. НИ от неограниченной функции. НИ с несколькими особенностями. Главное значение в смысле Коши.	2	1	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2346-49, 53-55, 57, 84.1, 85, 76, 76.1, 77, 83, 90, 91-95	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
57.	Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости.	2	1	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2741-43, 46-63, 65-66, 2716-37, 39-40, 83, 2800-05, 11, 11.1	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
58.	Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов	4	2	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2667-74, 2775-82, 84-91	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
59.	Функциональные свойства равномерного предела функциональных последовательностей и суммы функциональных рядов. Теорема о перестановке двух предельных переходов.	4	2	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2792-99, 2806-10.	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
60.	Равностепенная непрерывность. Теорема Арцела.	2	2	3	2	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
61.	Степенные ряды. Теорема Коши–Адамара.	2	2	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2812-26	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
62.	Функциональные свойства суммы степенного ряда.	2	2	3	1	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2833-37, 2916-20	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
63.	Ряды Тейлора. Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.	2	2	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2838, 39, 41, 43, 47-50, 52, 54, 55, 58, 61, 61.1, 69, 71, 83, 81, 86, 97, 2901, 03, 06, 09, 11, 13	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
64.	Разложение в ряд Тейлора элементарных функций.	2	1	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
65.	Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении.	2	0	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
66.	Семейства функций. 2 критерия равномерной сходимости.	2	1	0	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
67.	Функциональные свойства равномерного предела семейства функций. Теорема Дини.	2	1	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
68.	Функциональные свойства собственных интегралов, за-висящих от параметра	2	0	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 3711-20, 29, 30, 32, 34, 36, 37	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
69.	Функциональные свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признаки равномерной сходимости таких интегралов.	4	1	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 3744-46, 54, 55, 55.3, 57, 59, 60-68, 72, 73, 76.1, 77-83, 84, 86, 87, 88, 89, 91, 93, 95, 97, 3800, 04, 13, 15, 18, 21, 23	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
70.	Вычисление интегралов Дирихле и Пуассона.	2	1	1	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
71.	Эйлеровы интегралы.	2	1	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 3843-46, 48-49, 51-52, 55-58, 60-62, 80	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
72.	Формула Стирлинга	2	0	1	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
73.	Ряды Фурье в евклидовом пространстве.	2	1	1	2	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
74.	Замкнутость тригонометрической системы.	2	1	2	2	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
75.	Лемма Римана. Разложение функции в ряд Фурье. Интеграл Дирихле.	2	1	1	2	[2d, 3, 4d, 5d]	[5d]: 2836, 38, 39-43, 45, 48, 51-54, 56, 58, 61, 63, 64, 66, 67, 71, 73, 75-83	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
76.	Принцип локализации. Достаточные признаки сходимости рядов Фурье.	2	0	2	1	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
77.	Преобразование Фурье. Формула обращения. Теоре-ма Планшереля.	4	1	2	2.8	[2d, 3, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
	Всего часов	72	36	54	44.8			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины *Математический анализ* на IV семестр

очная

форма обучения

Вид работы	**Объем дисциплины**
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	7 /252
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	115.4
лекций	48
практических / семинарских	16
лабораторных	48
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	3.4
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	74.8
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	61.8

Форма(ы) контроля:
экзамен IV семестр
зачет IV семестр
В том числе: курсовая работа — IV семестр, контактных часов — 2, часов на самостоятельную работу — 10.

№№	Тема и содержание	Форма изучения материалов				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам	Задания для самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		Лк	ПЗ/Сем	ЛР	СР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
78	Интеграл Римана на n-мерном промежутке	3	1	3	2	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 3901-15	Проверка д/р, к/р, зачет, экз
79	Критерии интегрируемости Лебега и Дарбу	3	1	3	2	[3d, 4, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
80	Интеграл по множеству	4	0	4	2	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 3916-20	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	Свойства интеграла Римана	2	1	2	2	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 3921-24	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
82	Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини.	2	1	2	2	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 3926-36, 4076-86	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
83	Замена переменных в кратных интегралах.	2	1	2	4	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 3937-55, 3957-78, 3984-87, 3990-98, 4005-13, 15, 21, 87-91, 94-96, 99, 4101-03, 07	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
84	Несобственные интегралы.	4	1	4	4	[3d, 4, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
85	Криволинейные интегралы. Свойства. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го родов. Их сведение к обычным римановым интегралам. Примеры.	4	1	4	4	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4221-32, 38, 40, 48-57	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
86	Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутой кривой. Условие независимости криволинейного интеграла от кривой. Признак полного дифференциала.	2	1	2	6	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4258-69, 71-75, 84-92	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
87	Формула Грина.	2	1	2	4	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4296-99, 4300-07	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
88	Параметризация поверхности. Кривые на поверхности. Касательная плоскость.	2	1	2	4	[3d, 4, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
89	Сторона поверхности. Примеры.	2	1	2	4	[3d, 4, 4d, 5d]		Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
90	Площадь поверхности.	4	1	4	2	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4036-42, 49	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
91	Поверхностные интегралы 1-го рода. Их сведение к двойным.	2	1	2	4	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4341-50., 59, 60	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
92	Поверхностные интегралы 2-го рода. Их сведение к двойным.	2	1	2	2	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4362-66	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
93	Формула Остроградского.	2	0	2	5	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4376-80, 87-90,	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
94	Формула Стокса. Приложения для исследования криволинейных интегралов.	2	1	2	6	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4367-74	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз
95	Элементы векторного анализа.	4	1	4	5.8	[3d, 4, 4d, 5d]	[5d]: 4401-06, 08-13, 15-18, 22-30, 35-39, 40-45	Проверка д/р, колл-м, к/р, зачет, экз

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Курсовая работа				10	[3d, 4, 5d]	Задача повышенной сложности из [3d, 5d] либо теорема из анализа, которая не входит в программу экзамена	
	Всего часов	48	16	48	74.8			

Приложение № 2

Рейтинг–план дисциплины

Математический анализ

направление подготовки «01.03.01 Математика»

- курс 1, семестр 1

Экзамен

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Предел последовательности				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 1 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа №1	2	5	0	10
Предел функции. Непрерывность				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 2 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Коллоквиум			0	10
Дифференцируемость				
Текущий контроль			**0**	**14**
Тест № 3 (теория)	1	14	0	14
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа №3	2	5	0	10
Поощрительные баллы				
			0	**10**
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0
2. Посещение семинарских занятий			-10	0
Итоговый контроль			**0**	**30**
Экзамен			0	30

Зачет

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Предел последовательности				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 1 (Практика)	5	6	0	30
Предел функции. Непрерывность				

1	2	3	4	5
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 2 (Практика)	5	6	0	30
Дифференцируемость				
Рубежный контроль			**0**	**40**
Тест № 3 (Практика)	5	8	0	40
Итоговый контроль			**60**	
Зачет			60	

- курс 1, семестр 2

  Экзамен

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Неопределенный интеграл				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 1 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа № 1	2	5	0	10
Определенный интеграл. Приложения				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 2 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа № 2			0	15
Функции многих переменных				
Текущий контроль			**0**	**14**
Тест № 3 (теория)	1	14	0	14
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа №3	2	5	0	10
Поощрительные баллы				
			0	**10**
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0
2. Посещение семинарских занятий			-10	0
Итоговый контроль			**0**	**30**
Экзамен			0	30

Зачет

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
Неопределенный интеграл				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 1 (Практика)	5	6	0	30
Определенный интеграл. Приложения				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 2 (Практика)	5	6	0	30
Функции многих переменных				
Рубежный контроль			**0**	**40**
Тест № 3 (Практика)	5	8	0	40
Итоговый контроль			**60**	
Зачет			60	

- курс 2, семестр 1

  Экзамен

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Числовые ряды. Несобственные интегралы				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 1 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа №1	2	5	0	10
Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 2 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа № 2			0	15
Ряды Фурье. Преобразование Фурье.				
Текущий контроль			**0**	**14**
Тест № 3 (теория)	1	14	0	14
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа № 3	2	5	0	10
Поощрительные баллы				
			0	**10**
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0
2. Посещение семинарских занятий			-10	0
Итоговый контроль			**0**	**30**
Экзамен			0	30

Зачет

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Числовые ряды. Несобственные интегралы				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 1 (Практика)	5	6	0	30
Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 2 (Практика)	5	6	0	30
Ряды Фурье. Преобразование Фурье				
Рубежный контроль			**0**	**40**
Тест № 3 (Практика)	5	8	0	40
Итоговый контроль			**60**	
Зачет			60	

- курс 2, семестр 2

  Экзамен

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Кратные интегралы				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 1 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа №1	2	5	0	10
Криволинейные и поверхностные интегралы				
Текущий контроль			**0**	**13**
Тест № 2 (теория)	1	13	0	13
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа № 2			0	15
Элементы теории поля				
Текущий контроль			**0**	**14**
Тест № 3 (теория)	1	14	0	14
Рубежный контроль			**0**	**10**
Контрольная работа № 3	2	5	0	10
Поощрительные баллы				
			0	**10**
Посещаемость				
1. Посещение лекционных занятий			-6	0

1	2	3	4	5
2. Посещение семинарских занятий			-10	0
Итоговый контроль			**0**	**30**
Экзамен			0	30

Зачет

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Минимальный балл	Максимальный балл
1	2	3	4	5
Кратные интегралы				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 1 (Практика)	5	6	0	30
Криволинейные и поверхностные интегралы				
Рубежный контроль			**0**	**30**
Тест № 2 (Практика)	5	6	0	30
Элементы теории поля				
Рубежный контроль			**0**	**40**
Тест № 3 (Практика)	5	8	0	40
Итоговый контроль			**60**	
Зачет			60	