



Составитель: к. ф.-м. н., доцент Шарипов Руслан Абдулович.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры Высшей алгебры и геометрии,  
протокол № 10 от «26» июня 2017 г.

Заведующий кафедрой



/ Хабибуллин Б. Н. /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры Высшей алгебры и геометрии,  
протокол № 9 от «18» июня 2018 г.

Изменена структура представления данных в соответствии с обновлением формата таблиц по приказу № 753 от 18.06.2018 г.

Заведующий кафедрой



/ Хабибуллин Б. Н. /

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	6
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	6, 14
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	6
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	6
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	9, 23, 24
4.3. Рейтинг-план дисциплины	13, 23
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	13
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	13
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	13
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	14
7. Приложение 1	15
8. Приложение 2	22
9. Приложение 3	23
10. Приложение 4	24
11. Приложение 5: РПД заочного отделения	25

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Этапы освоения	Результаты обучения	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
1-й этап Знания	<u>Знать</u> : понятие линейного уравнения и системы линейных уравнений, метод Гаусса и метод Крамера для их решения; понятие матрицы и матричные операции; понятие определителя и обратной матрицы; понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства как основы для различных методов получения, хранения, переработки информации.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	
	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного уравнения и системы линейных уравнений, матрицы и определителя, обратной матрицы, линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств с целью понимания в последующем теоретических основ создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	
2-й этап Умения	<u>Уметь</u> : складывать и умножать матрицы, приводить матрицы к Гауссовскому ступенчатому виду; вычислять определители матриц и находить обратные матрицы; отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	

	собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах для понимания и в последующем практического осуществления различных методов получения, хранения, переработки информации.		
	Уметь: применять математический аппарат сложения и умножения матриц; приведения матриц к Гауссовскому ступенчатому виду; вычисления определителей матриц и обратных матриц; замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	
3-й этап Владеть навыками	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	
	Владеть: способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Высшая алгебра» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 1 курсе в 1 семестре.

Цели изучения дисциплины: овладение математическим аппаратом, используемым в дисциплинах специализации.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные на предыдущем уровне образования и проверенные при поступлении в университет, а также компетенции, сформированные в дисциплине «Аналитическая геометрия».

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<u>Знать</u> : понятие линейного уравнения и системы линейных уравнений, метод Гаусса и метод Крамера для их решения; понятие матрицы и матричные операции; понятие определителя и обратной матрицы; понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё

	замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства как основы для различных методов получения, хранения, переработки информации.				
Второй этап	<u>Уметь</u> : складывать и умножать матрицы, приводить матрицы к Гауссовскому ступенчатому виду; вычислять определители матриц и находить обратные матрицы; отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах для понимания и в последующем практического осуществления различных методов получения, хранения, переработки информации.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	Практически не владеет	Не владеет по значительной части материала дисциплины	По существу владеет	Владеет

ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного уравнения и системы линейных уравнений, матрицы и определителя, обратной матрицы, линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств с целью понимания в последующем теоретических основ создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё
Второй этап	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат сложения и умножения матриц; приведения матриц к Гауссовскому ступенчатому виду; вычисления определителей матриц и обратных матриц; замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных	Практически не владеет	Не владеет по значительной	По существу владеет	Владеет



	задач.		части материала дисциплины		
--	--------	--	----------------------------	--	--

#### Форма итогового контроля по дисциплине – экзамен

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины.

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

#### 4.2. Контрольные задания и материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	<u>Знать</u> : понятие линейного уравнения и системы линейных уравнений, метод Гаусса и метод Крамера для их решения; понятие матрицы и матричные операции; понятие определителя и обратной матрицы; понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства как основы для различных методов получения, хранения, переработки информации.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного уравнения и системы линейных уравнений, матрицы и определителя, обратной	ПК-17 – способность применять современные	Задачи для рубежного контроля,

	матрицы, линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств с целью понимания в последующем теоретических основ создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
2-й этап Умения	<u>Уметь</u> : складывать и умножать матрицы, приводить матрицы к Гауссовскому ступенчатому виду; вычислять определители матриц и находить обратные матрицы; отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах для понимания и в последующем практического осуществления различных методов получения, хранения, переработки информации.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат сложения и умножения матриц; приведения матриц к Гауссовскому ступенчатому виду; вычисления определителей матриц и обратных матриц; замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
3-й этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с	ОПК-3 – способность владеть	Задачи для рубежного контроля,

Владеть навыками	практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	Владеть: способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	Задачи для рубежного контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.

### Вопросы для проведения экзамена

1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса для их решения.
2. Системы линейных уравнений. Метод Крамера для их решения.
3. Определители квадратных матриц произвольного размера. Свойства определителей.
4. Умножение матриц. Понятие об обратной матрице и способы ее вычисления.
5. Линейные векторные пространства  $\mathbb{R}^n$ .
6. Базисы. Координаты векторов.
8. Множества и отображения.
9. Линейные отображения.
10. Матрица линейного отображения.
11. Линейные операторы.
12. Матрица линейного оператора.
13. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
14. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.
15. Векторы и ковекторы.
16. Билинейные и квадратичные формы. Формула восстановления. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

17. Положительно определенные квадратичные формы и евклидовы пространства.

### Экзаменационные билеты

Экзаменационные билеты состоят из 2 вопросов, первый вопрос берётся из первой половины списка вопросов к экзамену (1-8), второй вопрос — из второй половины списка (9-17). Исчерпывающий и верный ответ на каждый вопрос оценивается в 15 баллов.

#### Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** если студент продемонстрировал владение более 80% учебного материала по дисциплине.
- **17-24 баллов** если студент продемонстрировал владение от 60% до более 79% учебного материала по дисциплине.
- **10-16 баллов** если студент продемонстрировал владение от 45% до более 59% учебного материала по дисциплине.
- **1-10 баллов** если студент продемонстрировал владение менее 45% учебного материала по дисциплине.

Образец экзаменационных билетов представлен в приложении 4

### Задачи для рубежного контроля.

Дисциплина разбита на два модуля. По каждому модулю имеется свой список задач для самостоятельного решения. По первому модулю 34 задачи, по второму модулю 19 задач. Задачи доставляются студенту в режиме онлайн через университетский сервер WebWork

<http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>

За рубежный контроль студент может получить до 30 баллов, по 15 баллов за каждый модуль. Примеры задач для рубежного контроля по двум модулям представлены в приложении 3.

### Работа в аудитории и у доски.

Работа у доски состоит в выборочном разборе отдельных задач, аналогичных тем, что студенты получают в режиме онлайн через университетский сервер WebWork. Решение задачи сопровождается обсуждением теории. За каждый модуль студент выходит к доске как минимум 1 раз. При этом знание теории оценивается в 5 баллов, решение задач в 10 баллов, реплики с места, дополнения, пояснения в 5 баллов. Суммарно по 20 баллов за каждый из двух модулей.

#### **4.3. Рейтинг-план дисциплины.**

Рейтинг-план дисциплины представлен в приложении 2.

### **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

#### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

##### **Основная литература:**

1. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 1996, С. 146. ISBN 978-5-7477-0099-5 [Электронный ресурс] — Электронная версия печ. публикации .— <URL: [https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov\\_Kurs\\_linejnoj\\_algebry\\_up\\_1996.pdf](https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov_Kurs_linejnoj_algebry_up_1996.pdf)>.
2. Гайдамак О. Г., Силова Е. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2012, С. 96. [Электронный ресурс] — Электрон. версия печ. публикации .—<URL: [https://elib.bashedu.ru/dl/read/GaidamakSilovaAnalit.Geometriy\\_i\\_LineinayAlgebraUPos.2012.pdf/info](https://elib.bashedu.ru/dl/read/GaidamakSilovaAnalit.Geometriy_i_LineinayAlgebraUPos.2012.pdf/info)>.

##### **Дополнительная литература:**

3. Ахметвалиева Э. Н., Ахтямов А. М. Математика. Ч. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2010 — Электрон. версия печ. публикации. — <URL: <https://elib.bashedu.ru/dl/read/AhmetvalievaAhtymovaMatematika1Uch.pos.2010.pdf>>.
- 3.1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник для физ.-мат. спец. вузов / П. С. Александров . — СПб. : Лань, 2009 .— 512 с. : ил. — ISBN 978-5-8114-0908-2 .— <URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?p1\\_id=493](http://e.lanbook.com/books/element.php?p1_id=493)>.

#### **5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

4. Университетский сервер WebWork на сайте БашГУ: <http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>.
5. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Онлайн учебник: <URL: <http://freetextbooks.narod.ru/r4-b2.htm>>.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<i>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</i>	<i>Вид занятий</i>	<i>Наименование оборудования, программного обеспечения</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Аудитория 01, 02, 301 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Лекции</i>	Доска
Аудитория 322, 318, 216 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Практические занятия</i>	Доска
Библиотека, читальные залы	<i>Самостоятельная работа</i>	Интернет, университетский сервер WebWork

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Высшая алгебра на 1 семестр

очная

форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	37,2
лекций	18
практических/ семинарских	18
лабораторных	0
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,2
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СР)	72
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	34,8

Форма контроля:

экзамен 2 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР /СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Модуль 1</b>								
1.	Системы линейных уравнений СЛУ. Матричное представление линейных уравнений. Основная и расширенная матрица СЛУ. Элементарные преобразования систем линейных уравнений и элементарные преобразования их матриц. Метод Гаусса для решения СЛУ. Приведение матрицы системы линейных уравнений к гауссовскому ступенчатому виду. Зависимые и независимые переменные. Совместность систем линейных уравнений - понятие о ранге матрицы и теорема Кронекера-Капелли. Метод Крамера для решения систем линейных уравнений. Понятие определителя квадратной матрицы. Определители матриц размера $2 \times 2$ и $3 \times 3$ . Вычисление определителей методом разложения по строке. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей произвольного размера. Вычисление определителей при помощи элементарных преобразований строк и столбцов в матрице. Определители треугольных	2	2	0	8		4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 1-8 из числа задач для рубежного контроля	



	и диагональных матриц. Алгебраические операции с матрицами. Сложение матриц, умножение матриц на число и умножение двух матриц. Запись матричного умножения в компонентах. Нулевая матрица и единичная матрица. Понятие обратной матрицы для квадратных матриц. Определитель произведения двух квадратных матриц. Невырожденность и обратимость квадратных матриц.							
2.	Матричное решение уравнения $i^2 = -1$ . Комплексные числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение в степень и извлечение корней. Комплексный логарифм и комплексная экспонента. Линейное векторное пространство (ЛВП). Определение и примеры ЛВП. Аксиомы ЛВП и простейшие следствия из них. Понятие подпространства. Линейная зависимость и независимость систем векторов в ЛВП. Свойства линейной зависимости. Теорема Штейница. Системы векторов и их линейные оболочки. Порождающие системы векторов. Свойства минимальности и линейной независимости порождающих систем. Базисы и размерность ЛВП. Свойства размерности. Теорема о дополнении базиса. Базисы и координатное представление векторов, верхние и нижние индексы. Замена базисов в ЛВП. Матрицы перехода. Связь матриц прямого и	2	2	0	8	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 9-16 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	обратного переходов. Преобразование координат вектора при замене базисов.							
3.	<p>Отображения. Область определения и область значений отображения. Образы и полные прообразы отдельных элементов и подмножеств. Множество значений отображения. Сюръективность, инъективность и биективность отображений. Композиция отображений. Тожественное отображение. Понятие об обратном отображении. Сужение и продолжение отображений. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Критерии инъективности и сюръективности линейных отображений к терминах ядра и образа. Линейность отображения, обратного линейному и биективному отображению. Теорема о линейной независимости прообразов линейно независимых векторов. Изоморфизм линейных векторных пространств. Теорема о совпадении размерностей изоморфных пространств. Базисы и изоморфизм общих линейных векторных пространств пространствам <math>\mathbb{K}^n</math>, где <math>\mathbb{K}</math> — поле.</p>	2	2	0	8	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 17-24 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
4	<p>Матрица линейного отображения. Матрица составного отображения (композиции). Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов в области определения и в области значений. Задача о приведении матрицы линейного отображения к почти диагональному виду. Теорема о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения. Вычисление ядра и образа линейного отображения. Нахождение пары базисов, диагонализующих матрицу</p>	2	2	0	8	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 25-34 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	линейного отображения.							
<b>Модуль 2</b>								
5	<p>Линейные операторы. Инъективность, сюръективность и биективность в случае линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Детерминант линейного оператора. Невырожденность и биективность. Алгебраические операции с линейными операторами и их свойства. Коммутатор и антикоммутатор линейных операторов. Инвариантные подпространства линейного оператора. Суммы и пересечения инвариантных подпространств. Одномерные инвариантные подпространства и собственные векторы. Собственные числа и характеристическое уравнение линейного оператора. Корни характеристического уравнения (характеристические числа). Простые и кратные характеристические числа. Задача о приведении матрицы линейного оператора к каноническому виду. Диагонализуемые операторы. Собственные подпространства. Теорема о сумме собственных подпространств, отвечающих различным собственным числам.</p>	2	2	0	8	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 1-4 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
6	<p>Кратные собственные числа и корневые подпространства линейного оператора. Две теоремы о сумме корневых подпространств, отвечающих различным собственным числам. Особенности вещественного и комплексного случаев. Цепочки векторов в корневых подпространствах. Начальный и крайний векторы цепочки. Теорема о линейной</p>	2	2	0	8	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 5-8 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	<p>независимости цепочек с линейно независимыми крайними векторами и теорема о базисе из цепочек в корневом подпространстве линейного оператора. Жорданов блок, жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли. Линейные функционалы. Алгебраические операции с функционалами и сопряженное пространство. Координатные функционалы и сопряженный базис. Вычисление размерности сопряженного пространства. Ковекторная запись линейных функционалов и скалярное произведение вектора с ковектором. Преобразование координат ковектора при смене базиса. Ортогональные дополнения подпространств в сопряженном пространстве и их размерности. Свойства ортогональных дополнений. Сопряженное отображение.</p>							
7	<p>Билинейные и квадратичные формы. Симметричные билинейные формы. Восстановление симметричной билинейной формы по соответствующей ей квадратичной форме. Компоненты билинейных и квадратичных форм в базисе. Преобразование компонент квадратичной формы при замене базиса. Ядро квадратичной формы и ортогональные дополнения относительно квадратичных форм. Приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду. Нулевой индекс инерции и его связь с размерностью ядра. Сигнатура квадратичной формы (особенности комплексного и вещественного случаев). Положительный и отрицательный индексы инерции в</p>	2	2	0	8	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 9-12 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	вещественном случае. Теорема об инвариантности положительных и отрицательного индексов инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности.							
8	Положительные квадратичные формы в роли скалярного произведения. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Понятие длины вектора и угла между векторами. Матрица Грама и ее детерминант.	2	2	0	8	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 13-16 из числа задач для рубежного контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
9	Теорема о дополнении ортонормированного базиса из подпространства до ортонормированного базиса во всем пространстве. Квадратичные формы в евклидовом пространстве. Ограниченность квадратичных форм в конечномерных евклидовых пространствах и их нормы. Экстремальные векторы и диагонализация квадратичной формы в ортонормированном базисе. Диагонализация пары форм, одна из которых положительно определена.	2	2	0	8		4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 17-19 из числа задач для рубежного контроля	
	<b>Всего часов:</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>0</b>	<b>72</b>			
	Подготовка к экзамену (Контроль)	0	0	0	34,8			
	Групповая консультация пред экзаменом 1,2							
	<b>Всего часов:</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>0</b>	<b>106,8</b>			<b>экзамен</b>

Рейтинг-план дисциплины Высшая алгебра

Направление подготовки: 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи

Курс первый, семестр первый (осенний)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий в модуле	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Работа у доски и в аудитории			0	20
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Решение задач онлайн из первого задания WebWork	0,44	34	0	15
<b>Модуль 2</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Работа у доски и в аудитории			0	20
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Решение задач онлайн из второго задания WebWork	0,79	19	0	15
<b>Поощрительные баллы</b>				
Согласно положению о модульно рейтинговой системе			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
Посещение лекционных занятий			0	-6
Посещение семинарских занятий			0	-10
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен	15	2	0	30

Образцы задач для рубежного контроля

Из первого задания по WebWork

**Задача 1.10.** Матрица  $A$  размера  $4 \times 4$  со строками  $v_1, v_2, v_3$  и  $v_4$  имеет определитель  $\det A = 5$ . Найдите определитель матрицы  $\det \begin{bmatrix} 4v_1 + 2v_3 \\ v_2 \\ 7v_1 + 5v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ .

**Задача 1.11.** Пусть  $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5$ . Найдите следующие определители:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 8g & 8h & 8i \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5d & 5e & 5f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

**Задача 1.12.** Используйте определители, чтобы установить, является ли следующая матрица вырожденной:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из второго задания по WebWork

**Задача 2.3.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ . Определим линейное отображение  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  как  $T(x) = Ax$ . Найдите образы векторов  $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$  и  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  при отображении  $T$ .

**Задача 2.4.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$  и  $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \end{bmatrix}$ . Определим линейное преобразование  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  как  $T(x) = Ax$ . Найдите вектор  $x$ , чей образ при  $T$  равен  $b$ . Единствен ли такой вектор  $x$ ?

**Задача 2.5.** Пусть  $S$  — линейное отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$  с соответствующей ему матрицей  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Пусть  $T$  — линейное отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$  с соответствующей ему матрицей  $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ . Найдите матрицу  $C$  композиции отображений  $T \circ S$ .

Образец экзаменационных билетов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

экзаменационный билет № номер скрыт  
по дисциплине «Высшая алгебра» (20\_\_ - \_\_ уч. год)

1. Системы линейных уравнений. Метод Крамера для их решения.
2. Векторы и ковекторы.

Преподаватель \_\_\_\_\_ / Шарипов Р. А. /


Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Хабибуллин Б. Н. /



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждено: на заседании кафедры  
протокол от « 26 » июня 2017 г.  
№ 10  
Зав. кафедрой  /Хабибуллин Б.Н.

Согласовано:  
Председатель УМК факультета /института  
 /Балапанов М.Х.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Дисциплина Высшая алгебра

*(наименование дисциплины)*

Б1.Б.Базовая часть

*(Цикл дисциплины и его часть (базовая, вариативная, дисциплина по выбору))*

**программа бакалавриата**

Направление подготовки (специальность)

11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи

*(указывается код и наименование направления подготовки (специальности))*

Направленность (профиль) подготовки

Оптические системы и сети связи

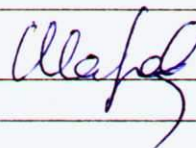
*(указывается наименование направленности (профиля) подготовки)*

Квалификация

бакалавр

*(указывается квалификация)*

Разработчик (составитель)  
Доцент кафедры ВАиГ, к.ф.-м.н.



/Шарипов Р.А.

Для приема: 2017 г.

Уфа 2017 г.

Составитель: к. ф.-м. н., доцент Шарипов Руслан Абдулович.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры Высшей алгебры и геометрии,  
протокол № 10 от «26» июня 2017 г.

Заведующий кафедрой



/ Хабибуллин Б. Н. /

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры Высшей алгебры и геометрии,  
протокол № 9 от «18» июня 2018 г.

Изменена структура представления данных в соответствии с обновлением формата таблиц по приказу № 753 от 18.06.2018 г.

Заведующий кафедрой



/ Хабибуллин Б. Н. /

### Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы	6
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	6, 15
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	6
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	6
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	9, 23, 24
4.3. Рейтинг-план дисциплины	13, 23
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	13
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	13
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	13
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	14
7. Приложение 1	15
8. Приложение 2	22
9. Приложение 3	23
10. Приложение 4	24

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Этапы освоения	Результаты обучения	Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
1-й этап Знания	<u>Знать</u> : понятие линейного уравнения и системы линейных уравнений, метод Гаусса и метод Крамера для их решения; понятие матрицы и матричные операции; понятие определителя и обратной матрицы; понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства как основы для различных методов получения, хранения, переработки информации.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	
	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного уравнения и системы линейных уравнений, матрицы и определителя, обратной матрицы, линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств с целью понимания в последующем теоретических основ создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	
2-й этап Умения	<u>Уметь</u> : складывать и умножать матрицы, приводить матрицы к Гауссовскому ступенчатому виду; вычислять определители матриц и находить обратные матрицы; отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	

	собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах для понимания и в последующем практического осуществления различных методов получения, хранения, переработки информации.		
	Уметь: применять математический аппарат сложения и умножения матриц; приведения матриц к Гауссовскому ступенчатому виду; вычисления определителей матриц и обратных матриц; замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	
3-й этап Владеть навыками	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	
	Владеть: способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	

## 2. Цель и место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Высшая алгебра» относится к базовой части.

Дисциплина изучается на 2 курсе во 2 семестре.

Цель изучения дисциплины: овладение математическим аппаратом, используемым в дисциплинах специализации.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные на предыдущем уровне образования и проверенные при поступлении в университет, а также компетенции, сформированные в дисциплине «Аналитическая геометрия».

## 3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

## 4. Фонд оценочных средств по дисциплине

### 4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<u>Знать</u> : понятие линейного уравнения и системы линейных уравнений, метод Гаусса и метод Крамера для их решения; понятие матрицы и матричные операции; понятие определителя и обратной матрицы; понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё

	замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства как основы для различных методов получения, хранения, переработки информации.				
Второй этап	<u>Уметь</u> : складывать и умножать матрицы, приводить матрицы к Гауссовскому ступенчатому виду; вычислять определители матриц и находить обратные матрицы; отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах для понимания и в последующем практического осуществления различных методов получения, хранения, переработки информации.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	Практически не владеет	Не владеет по значительной части материала дисциплины	По существу владеет	Владеет

ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.

Этап, уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Первый этап	<u>Знать</u> : естественнонаучную сущность понятий линейного уравнения и системы линейных уравнений, матрицы и определителя, обратной матрицы, линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств с целью понимания в последующем теоретических основ создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	Практически не знает	Имеет значительные пробелы в знаниях	Знает почти всё	Знает всё
Второй этап	<u>Уметь</u> : применять математический аппарат сложения и умножения матриц; приведения матриц к Гауссовскому ступенчатому виду; вычисления определителей матриц и обратных матриц; замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов между ними в многомерных евклидовых пространствах.	Практически не умеет	Не умеет по значительной части материала дисциплины	Умеет почти всё	Умеет всё
Третий этап	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных	Практически не владеет	Не владеет по значительной	По существу владеет	Владеет



	задач.		части материала дисциплины		
--	--------	--	----------------------------	--	--

#### Форма итогового контроля по дисциплине – экзамен

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины.

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

#### 4.2. Контрольные задания и материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	<u>Знать:</u> понятие линейного уравнения и системы линейных уравнений, метод Гаусса и метод Крамера для их решения; понятие матрицы и матричные операции; понятие определителя и обратной матрицы; понятие линейного векторного пространства и его подпространств; понятие базисов и их замен; понятие множеств и их отображений; понятие линейных отображений и их матриц; понятие линейных операторов и их матриц; понятие собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, жордановых форм матрицы линейного оператора; понятие ковекторов, понятие билинейных и квадратичных форм и их сигнатур; понятие многомерного евклидова пространства как основы для различных методов получения, хранения, переработки информации.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	Задачи для текущего контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.

	<p>Знать: естественнонаучную сущность понятий линейного уравнения и системы линейных уравнений, матрицы и определителя, обратной матрицы, линейного векторного пространства и его подпространств, базисов в линейных векторных пространствах, множеств и их отображений, линейных отображений, линейных операторов, собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, ковекторов, билинейных и квадратичных форм, многомерных евклидовых пространств с целью понимания в последующем теоретических основ создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.</p>	<p>ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.</p>	<p>Задачи для текущего контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.</p>
<p>2-й этап Умения</p>	<p><u>Уметь</u>: складывать и умножать матрицы, приводить матрицы к Гауссовскому ступенчатому виду; вычислять определители матриц и находить обратные матрицы; отличать линейные векторные пространства и их подпространства от других множеств; выполнять замены базисов; строить отображения множеств; вычислять матрицы линейных отображений и линейных операторов; находить собственные числа и собственные векторы линейных операторов; приводить матрицы линейных операторов к жордановой форме; вычислять скалярное произведение векторов с ковекторами; находить сигнатуры билинейных и квадратичных форм; находить длины векторов и углы между ними в многомерных евклидовых пространствах для понимания и в последующем практического осуществления различных методов получения, хранения, переработки информации.</p>	<p>ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.</p>	<p>Задачи для текущего контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.</p>
	<p>Уметь: применять математический аппарат сложения и умножения матриц; приведения матриц к Гауссовскому ступенчатому виду; вычисления определителей матриц и обратных матриц; замены базисов; построения отображений множеств; вычисления матриц линейных отображений и линейных операторов; нахождения собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, приведения матриц линейных операторов к жордановой форме, вычисления скалярного произведения векторов с ковекторами; нахождения сигнатуры билинейных и квадратичных форм; нахождения длин векторов и углов</p>	<p>ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.</p>	<p>Задачи для текущего контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.</p>

	между ними в многомерных евклидовых пространствах.		
3-й этап  Владеть навыками	<u>Владеть</u> : способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ОПК-3 – способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации.	Задачи для текущего контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.
	Владеть: способностью соединять теоретические знания с практическими навыками при решении учебно-тренировочных задач.	ПК-17 – способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.	Задачи для текущего контроля, экзаменационные вопросы и билеты, работа в аудитории и у доски.

### Вопросы для проведения экзамена

1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса для их решения.
2. Системы линейных уравнений. Метод Крамера для их решения.
3. Определители квадратных матриц произвольного размера. Свойства определителей.
4. Умножение матриц. Понятие об обратной матрице и способы ее вычисления.
5. Линейные векторные пространства  $\mathbb{R}^n$ .
6. Базисы. Координаты векторов.
8. Множества и отображения.
9. Линейные отображения.
10. Матрица линейного отображения.
11. Линейные операторы.
12. Матрица линейного оператора.
13. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
14. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.
15. Векторы и ковекторы.

16. Билинейные и квадратичные формы. Формула восстановления. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
17. Положительно определенные квадратичные формы и евклидовы пространства.

### Экзаменационные билеты

Экзаменационные билеты состоят из 2 вопросов, первый вопрос берётся из первой половины списка вопросов к экзамену (1-8), второй вопрос — из второй половины списка (9-17). Исчерпывающий и верный ответ на каждый вопрос оценивается в 15 баллов.

#### Критерии оценки (в баллах):

- **25-30 баллов** если студент продемонстрировал владение более 80% учебного материала по дисциплине.
- **17-24 баллов** если студент продемонстрировал владение от 60% до более 79% учебного материала по дисциплине.
- **10-16 баллов** если студент продемонстрировал владение от 45% до более 59% учебного материала по дисциплине.
- **1-10 баллов** если студент продемонстрировал владение менее 45% учебного материала по дисциплине.

Образец экзаменационных билетов представлен в приложении 4

#### Задачи для текущего контроля.

Дисциплина разбита на два модуля. По каждому модулю имеется свой список задач для самостоятельного решения. По первому модулю 34 задачи, по второму модулю 19 задач. Задачи доставляются студенту в режиме онлайн через университетский сервер WebWork

<http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>

За рубежный контроль студент может получить до 30 баллов, по 15 баллов за каждый модуль. Примеры задач для текущего контроля по двум модулям представлены в приложении 3.

### **Работа в аудитории и у доски.**

Работа у доски состоит в выборочном разборе отдельных задач, аналогичных тем, что студенты получают в режиме онлайн через университетский сервер WebWork. Решение задачи сопровождается обсуждением теории. За время двух сессий студент выходит к доске как минимум 2 раза. При этом знание теории оценивается в 5 баллов, решение задач в 10 баллов, реплики с места, дополнения, пояснения в 5 баллов. Суммарно по 20 баллов за каждый из двух модулей.

### **4.3. Рейтинг-план дисциплины.**

Рейтинг-план дисциплины представлен в приложении 2.

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература:**

1. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 1996, С. 146. ISBN 978-5-7477-0099-5 [Электронный ресурс] — Электронная версия печ. публикации .— <URL: [https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov\\_Kurs\\_linejnoj\\_algebry\\_up\\_1996.pdf](https://elib.bashedu.ru/dl/local/Sharipov_Kurs_linejnoj_algebry_up_1996.pdf)>.
2. Гайдамак О. Г., Силова Е. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2012, С. 96. [Электронный ресурс] — Электрон. версия печ. публикации .—<URL: [https://elib.bashedu.ru/dl/read/GaidamakSilovaAnalit.Geometriy\\_i\\_LineinayAlgebraUPos.2012.pdf/info](https://elib.bashedu.ru/dl/read/GaidamakSilovaAnalit.Geometriy_i_LineinayAlgebraUPos.2012.pdf/info)>.

#### **Дополнительная литература:**

3. Ахметвалиева Э. Н., Ахтямов А. М. Математика. Ч. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. // РИЦ БашГУ, Уфа, 2010 — Электрон. версия печ. публикации. — <URL: <https://elib.bashedu.ru/dl/read/AhmetvalievaAhtymovaMatematika1Uch.pos.2010.pdf>>.
- 3.1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник для физ.-мат. спец. вузов / П. С. Александров . — СПб. : Лань, 2009 .— 512 с. : ил. — ISBN 978-5-8114-0908-2 .— <URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=493](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=493)>.

### **5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

4. Университетский сервер WebWork на сайте БашГУ: <http://webwork-okko.bashedu.ru/webwork2/>.
5. Шарипов Р. А. Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Онлайн учебник: <URL: <http://freetextbooks.narod.ru/r4-b2.htm>>.

**6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<i>Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий</i>	<i>Вид занятий</i>	<i>Наименование оборудования, программного обеспечения</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Аудитория 01, 02, 301 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Лекции</i>	Доска
Аудитория 322, 318, 216 или иная аудитория по расписанию занятий	<i>Практические занятия</i>	Доска
Библиотека, читальные залы	<i>Самостоятельная работа</i>	Интернет, университетский сервер WebWork

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ**

дисциплины Высшая алгебра на 2 семестр

заочная

форма обучения

<b>Вид работы</b>	<b>Объем дисциплины</b>
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	4/144
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	17,7
лекций	8
практических/ семинарских	8
лабораторных	0
других (групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие работу обучающихся с преподавателем)	1,7
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС)	118,5
Учебных часов на подготовку к экзамену/зачету/дифференцированному зачету (Контроль)	7,8

Форма контроля:

экзамен 2 курс сессия 3

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендуемая студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		ЛК	ПР /СЕМ	ЛР	СРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Модуль 1</b>								
1.	Системы линейных уравнений СЛУ. Матричное представление линейных уравнений. Основная и расширенная матрица СЛУ. Элементарные преобразования систем линейных уравнений и элементарные преобразования их матриц. Метод Гаусса для решения СЛУ. Приведение матрицы системы линейных уравнений к гауссовскому ступенчатому виду. Зависимые и независимые переменные. Совместность систем линейных уравнений - понятие о ранге матрицы и теорема Кронекера-Капелли. Метод Крамера для решения систем линейных уравнений. Понятие определителя квадратной матрицы. Определители матриц размера $2 \times 2$ и $3 \times 3$ . Вычисление определителей методом разложения по строке. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей произвольного размера. Вычисление определителей при помощи элементарных преобразований строк и столбцов в матрице. Определители треугольных	0	0	0	16		4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 1-8 из числа задач для текущего контроля	



	и диагональных матриц. Алгебраические операции с матрицами. Сложение матриц, умножение матриц на число и умножение двух матриц. Запись матричного умножения в компонентах. Нулевая матрица и единичная матрица. Понятие обратной матрицы для квадратных матриц. Определитель произведения двух квадратных матриц. Невырожденность и обратимость квадратных матриц.							
2.	Матричное решение уравнения $i^2 = -1$ . Комплексные числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сложение и вычитание комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение в степень и извлечение корней. Комплексный логарифм и комплексная экспонента. Линейное векторное пространство (ЛВП). Определение и примеры ЛВП. Аксиомы ЛВП и простейшие следствия из них. Понятие подпространства. Линейная зависимость и независимость систем векторов в ЛВП. Свойства линейной зависимости. Теорема Штейница. Системы векторов и их линейные оболочки. Порождающие системы векторов. Свойства минимальности и линейной независимости порождающих систем. Базисы и размерность ЛВП. Свойства размерности. Теорема о дополнении базиса. Базисы и координатное представление векторов, верхние и нижние индексы. Замена базисов в ЛВП. Матрицы перехода. Связь матриц прямого и	0	0	0	16	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 9-16 из числа задач для текущего контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	обратного переходов. Преобразование координат вектора при замене базисов.							
3.	<p>Отображения. Область определения и область значений отображения. Образы и полные прообразы отдельных элементов и подмножеств. Множество значений отображения. Сюръективность, инъективность и биективность отображений. Композиция отображений. Тожественное отображение. Понятие об обратном отображении. Сужение и продолжение отображений. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Критерии инъективности и сюръективности линейных отображений к терминах ядра и образа. Линейность отображения, обратного линейному и биективному отображению. Теорема о линейной независимости прообразов линейно независимых векторов. Изоморфизм линейных векторных пространств. Теорема о совпадении размерностей изоморфных пространств. Базисы и изоморфизм общих линейных векторных пространств пространствам <math>\mathbb{K}^n</math>, где <math>\mathbb{K}</math> — поле.</p>	0	0	0	16	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 17-24 из числа задач для текущего контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
4	<p>Матрица линейного отображения. Матрица составного отображения (композиции). Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов в области определения и в области значений. Задача о приведении матрицы линейного отображения к почти диагональному виду. Теорема о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения. Вычисление ядра и образа линейного отображения. Нахождение пары базисов, диагонализующих матрицу</p>	0	0	0	16	1-3,5	4, первое задание онлайн по WebWork, задачи 25-34 из числа задач для текущего контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	линейного отображения.							
	Обзорные лекции по материалу первого модуля и выборочный разбор задач из онлайн заданий на семинарских занятиях	4	4	0	0			Оценка работы в аудитории и у доски
<b>Модуль 2</b>								
5	<p>Линейные операторы. Инъективность, сюръективность и биективность в случае линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Детерминант линейного оператора. Невырожденность и биективность. Алгебраические операции с линейными операторами и их свойства. Коммутатор и антикоммутатор линейных операторов. Инвариантные подпространства линейного оператора. Суммы и пересечения инвариантных подпространств. Одномерные инвариантные подпространства и собственные векторы. Собственные числа и характеристическое уравнение линейного оператора. Корни характеристического уравнения (характеристические числа). Простые и кратные характеристические числа. Задача о приведении матрицы линейного оператора к каноническому виду. Диагонализируемые операторы. Собственные подпространства. Теорема о сумме собственных подпространств, отвечающих различным собственным числам.</p>	0	0	0	10,9	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 1-4 из числа задач для текущего контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
6	<p>Кратные собственные числа и корневые подпространства линейного оператора. Две теоремы о сумме корневых подпространств, отвечающих различным собственным числам. Особенности вещественного и комплексного</p>	0	0	0	10,9	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 5-8 из числа задач для текущего	Оценка работы в аудитории и у доски

	<p>случаев. Цепочки векторов в корневых подпространствах. Начальный и крайний векторы цепочки. Теорема о линейной независимости цепочек с линейно независимыми крайними векторами и теорема о базисе из цепочек в корневом подпространстве линейного оператора. Жорданов блок, жорданов базис и жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли. Линейные функционалы. Алгебраические операции с функционалами и сопряженное пространство. Координатные функционалы и сопряженный базис. Вычисление размерности сопряженного пространства. Ковекторная запись линейных функционалов и скалярное произведение вектора с ковектором. Преобразование координат ковектора при смене базиса. Ортогональные дополнения подпространств в сопряженном пространстве и их размерности. Свойства ортогональных дополнений. Сопряженное отображение.</p>						контроля	
7	<p>Билинейные и квадратичные формы. Симметричные билинейные формы. Восстановление симметричной билинейной формы по соответствующей ей квадратичной форме. Компоненты билинейных и квадратичных форм в базисе. Преобразование компонент квадратичной формы при замене базиса. Ядро квадратичной формы и ортогональные дополнения относительно квадратичных форм. Приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду. Нулевой индекс инерции и его связь с размерностью ядра. Сигнатура квадратичной</p>	0	0	0	10,9	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 9-12 из числа задач для текущего контроля	Оценка работы в аудитории и у доски

	формы (особенности комплексного и вещественного случаев). Положительный и отрицательный индексы инерции в вещественном случае. Теорема об инвариантности положительного и отрицательного индексов инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности.							
8	Положительные квадратичные формы в роли скалярного произведения. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Понятие длины вектора и угла между векторами. Матрица Грама и ее детерминант.	0	0	0	10,9	1-3,5	4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 13-16 из числа задач для текущего контроля	Оценка работы в аудитории и у доски
9	Теорема о дополнении ортонормированного базиса из подпространства до ортонормированного базиса во всем пространстве. Квадратичные формы в евклидовом пространстве. Ограниченность квадратичных форм в конечномерных евклидовых пространствах и их нормы. Экстремальные векторы и диагонализация квадратичной формы в ортонормированном базисе. Диагонализация пары форм, одна из которых положительно определена.	0	0	0	10,9		4, второе задание онлайн по WebWork, задачи 17-19 из числа задач для текущего контроля	
	Обзорные лекции по всему материалу и выборочный разбор задач из онлайн заданий на семинарских занятиях	4	4	0	0			Оценка работы в аудитории и у доски
	<b>Всего часов:</b>	<b>8</b>	<b>8</b>		<b>118,5</b>			
	Подготовка к экзамену (Контроль)				7,8			
	Групповая консультация пред экзаменом 1,7							
	<b>Всего часов:</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>126,3</b>			<b>экзамен</b>



Рейтинг-план дисциплины Высшая алгебра

Направление подготовки: 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи

Курс второй, семестр второй (весенне-летний)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий в модуле	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Решение задач онлайн из первого задания WebWork	0,44	34	0	15
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Оценка работы в аудитории и у доски				20
<b>Модуль 2</b>				
<b>Текущий контроль</b>				
1. Решение задач онлайн из второго задания WebWork	0,79	19	0	15
<b>Рубежный контроль</b>				
1. Оценка работы в аудитории и у доски				20
<b>Поощрительные баллы</b>				
Согласно положению о модульно рейтинговой системе			0	10
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>				
Посещение лекционных занятий			0	-6
Посещение семинарских занятий			0	-10
<b>Итоговый контроль</b>				
1. Экзамен	15	2	0	30

Образцы задач для текущего контроля

Из первого задания по WebWork

**Задача 1.10.** Матрица  $A$  размера  $4 \times 4$  со строками  $v_1, v_2, v_3$  и  $v_4$  имеет определитель  $\det A = 5$ . Найдите определитель матрицы  $\det \begin{bmatrix} 4v_1 + 2v_3 \\ v_2 \\ 7v_1 + 5v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ .

**Задача 1.11.** Пусть  $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5$ . Найдите следующие определители:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 8g & 8h & 8i \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5d & 5e & 5f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

**Задача 1.12.** Используйте определители, чтобы установить, является ли следующая матрица вырожденной:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из второго задания по WebWork

**Задача 2.3.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ . Определим линейное отображение  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  как  $T(x) = Ax$ . Найдите образы векторов  $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$  и  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  при отображении  $T$ .

**Задача 2.4.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$  и  $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \end{bmatrix}$ . Определим линейное преобразование  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  как  $T(x) = Ax$ . Найдите вектор  $x$ , чей образ при  $T$  равен  $b$ . Единствен ли такой вектор  $x$ ?

**Задача 2.5.** Пусть  $S$  — линейное отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$  с соответствующей ему матрицей  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Пусть  $T$  — линейное отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$  с соответствующей ему матрицей  $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ . Найдите матрицу  $C$  композиции отображений  $T \circ S$ .



Образец экзаменационных билетов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

экзаменационный билет № номер скрыт  
по дисциплине «Высшая алгебра» (20\_\_ - \_\_ уч. год)

1. Системы линейных уравнений. Метод Крамера для их решения.
2. Векторы и ковекторы.

Преподаватель \_\_\_\_\_ / Шарипов Р. А. /

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / Хабибуллин Б. Н. /