

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНЖЕНЕРНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ


Утверждено:

на заседании кафедры  
протокол №17 от «13»  
июня 2017г.

И.о. зав.кафедрой  / Юминов И.П.

Согласовано:

Председатель УМК  
факультета

 /А.Я.Мельникова

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
Метод конечных элементов

Обязательные дисциплины, вариативная часть — Б1 .В. 1.06

Программа бакалавриата

Направление подготовки  
15.03.02 - Технологические машины и оборудование

Направленность (профиль) подготовки  
Инжиниринг технологического оборудования

Квалификация бакалавр

Разработчик (составитель)  
Доцент, к.т.н.



/Райский В.В.

(подпись, Фамилия И.О.)

Для приема: 2017 г.

Уфа 2017г.

Составитель: Райский В.В.


Рабочая программа дисциплины актуализирована на заседании кафедры протокол от «13» июня 2017 г. № 17

Заведующий кафедрой

 / Абдеев Р.Г.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры: обновлены билеты и список используемой литературы. Протокол №17 от «15» июня 2018 г.

И.о. заведующего кафедрой

 / Юминов И.П.

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры: обновлены билеты и список используемой литературы протокол № 28 от «15» мая 2019 г.

И.о.зав. кафедрой

 / Боткин А.В./

Дополнения и изменения, внесенные в рабочую программу дисциплины, утверждены на заседании кафедры: обновлены билеты и список используемой литературы протокол № 10 от «13» января 2020 г.

И.о.зав. кафедрой

 / Сайтов Р.И./

## Список документов и материалов

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы	5
3. Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)	8
4. Фонд оценочных средств по дисциплине	9
4.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	9
4.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций	12
4.3. Рейтинг-план дисциплины (при необходимости)	13
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	32
5.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	32
5.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины	32
6. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	33

# 1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

(с ориентацией на карты компетенций)

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Результаты обучения		Формируемая компетенция (с указанием кода)	Примечание
Знать	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивления материалов, расчётов машиностроительных конструкций современные средства вычислительной техники.</li> <li>2. Теоретические и инженерные основы методы конечных элементов.</li> <li>3. Способы алгоритмизации расчётов при исследованиях и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материалов и строительной механики.</li> </ol>	Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5)	
Уметь	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания.</li> <li>2. Формировать расчётные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчётов методом конечных элементов.</li> <li>3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и работам.</li> </ol>	Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5)	
Владеть (навыки / опыт деятельности)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой.</li> <li>2. Приёмами работы с программными средствами.</li> </ol>	Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5)	



## 2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Метод конечных элементов» относится к *обязательным дисциплинам вариативной части* – Б1.В.1.06

Дисциплина изучается на 3 курсе в 6 семестре.

Предшествующими курсами, на которых непосредственно базируется дисциплина и по которым студент должен иметь соответствующие знания и умения, являются:

- высшая математика (линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения);
- вычислительная математика и программирование на ЭВМ (численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений);
- физика (раздел “механика”);
- теоретическая механика (статика, кинематика, динамики);
- сопротивление материалов.

Вместе с тем, курс «Метод конечных элементов» является инструментом для решения прикладных задач таких дисциплин, как

- техническая механика,
- сопротивление материалов,
- детали машин и основы конструирования,
- теории механизмов и машин,
- гидравлика,
- теплотехника,
- подъемно-транспортные устройства,
- машины и аппараты специальных производств и многих других.

Метод конечных элементов является одной из фундаментальных дисциплин в котором разрабатываются методы решения прикладных задач различных областей науки и техники.

Реализация в дисциплине «Метод конечных элементов» требований квалификационной характеристики, основных требований к профессиональной подготовленности выпускника и целей основной образовательной программы в соответствии с ФГОС ВО по направлению 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» по профилю «Инжиниринг технологического оборудования» должна учитывать следующее.

Целями освоения дисциплины являются:

- на основании объективных принципов и законов, которым подчинено деформируемое тело, вывести точные количественные соотношения между мерами действия силовых факторов и деформациями, и перемещениями точек этих тел;
- рассмотреть общие законы равновесия тел и возникающие при этом воздействия между отдельными их частями;
- используя законы и принципы сопротивления материалов сформировать необходимый уровень технических знаний специалиста;

– сформировать необходимый запас знаний специалиста для понимания механических явлений в практической деятельности и для самостоятельного овладения всем новым в ходе научно-технического прогресса.

Основная задача метода конечных элементов – разработка общих методов решения различных прикладных задач.

В связи с этим, квалифицированному специалисту необходимо:

– иметь четкие представления о прочности, жесткости и устойчивости деформированного тела;

– грамотно составить расчетную схему исследуемого элемента конструкции;

– проводить, в соответствии с поставленной задачей исследования, необходимые расчеты на прочность, жесткость или устойчивость принятой расчетной схемы конструкции;

– составлять, в соответствии действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.

Дипломированный специалист должен:

– освоить современные методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость, в том числе и с применением существующих пакетов прикладных программ для ЭВМ;

– научиться выбирать методы испытаний проектируемых конструкций в целом и материалов, из которых изготовлены их детали, анализировать и обрабатывать результаты исследований и измерений;

– научиться составлять технические отчеты и обзоры научно-технической литературы в области своей профессиональной деятельности и проводить патентный поиск.

В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы следующие компетенции:

– способностью принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5).

Знание методик Метода конечных элементов позволяет установить:

– меры взаимодействия между отдельными частями тел: силы, напряжения, деформации, перемещения;

– условия равновесия материальных объектов;

– прочностные характеристики материалов и изготовленных из них деталей;

– меры механического взаимодействия между отдельными частями деталей;

– условия применимости общих законов сопротивления материалов к различным случаям нагружения и деформирования тел.

Выпускник по направлению 15.03.02 подготовки бакалавра должен уметь:

– находить внутренние силы, действующие в материале;

– определять напряженно-деформированное состояние материала в условиях равновесия материальных объектов;

– находить перемещения различных сечений тел;



- по заданному действию сил на материальный объект определить его напряженно-деформированное состояние;
- по заданному напряженно-деформированному состоянию объекта определить его прочностную надежность.

Лекционные занятия проводят, как правило, в поточных аудиториях, оснащенных интерактивными досками, при этом, студенты должны быть обеспечены необходимым раздаточным иллюстративным материалом по каждой лекции. Однако, сказанное не исключает проведение занятий традиционным академическим способом с использованием меловой доски.

Практические занятия проводят в компьютерном классе или в специализированной лаборатории, при этом, каждый студент должен быть обеспечен печатными методическими материалами, регламентирующими порядок работы на занятии. При работе в компьютерном классе предусмотрено использование специальных инженерных программ, например, MathCad, ANSYS, APM WinMachin, Компас и др.

В рамках изучения дисциплины, по согласованию сторон, предусмотрено проведение отдельных занятий ведущими специалистами-производственниками предприятий города, а также проведение экскурсий на предприятия, в лаборатории родственных ВУЗов, посещение специализированных выставок и пр.

*(В качестве требований к предварительным компетенциям, сформированным до начала изучения дисциплины, указывается список дисциплин, результаты которых необходимы для изучения данной дисциплины. Дается описание логической и содержательно-методической взаимосвязи с другими частями ОП (дисциплинами, практиками). Указываются требования к «входным» знаниям, умениям и готовностям обучающегося, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин. Для этого перечисляются те дисциплины и практики, освоение которых необходимо данной дисциплине как предшествующие входные знания и умения).*

### **3 Содержание рабочей программы (объем дисциплины, типы и виды учебных занятий, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся)**

Содержание рабочей программы представлено в Приложении № 1.

*Количество часов/зет указывается в соответствии с учебным планом, заполняется отдельно по каждой форме обучения.*



#### 4 Фонд оценочных средств по дисциплине

4.1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ПК-5 – Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования.

Этап (уровень) освоения компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		Не удовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	
Первый этап (уровень)	<p>Знать:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивление материалов, расчеты машиностроительных конструкций, современные средства вычислительной техники.</li> <li>2. Теоретические и инженерные основы методов конечных элементов.</li> <li>3. Способы алгоритмизации расчетов при исследовании и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материала и строительной механики.</li> </ol>	<p>Не знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивление материалов, расчеты машиностроительных конструкций, современные средства вычислительной техники.</li> <li>2. Теоретические и инженерные основы методов конечных элементов.</li> <li>3. Способы алгоритмизации расчетов при исследовании и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материала и строительной механики.</li> </ol>	<p>Знает фрагментарно:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивление материалов, расчеты машиностроительных конструкций, современные средства вычислительной техники.</li> <li>2. Теоретические и инженерные основы методов конечных элементов.</li> <li>3. Способы алгоритмизации расчетов при исследовании и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материала и строительной механики.</li> </ol>	<p>В основном знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивление материалов, расчеты машиностроительных конструкций, современные средства вычислительной техники.</li> <li>2. Теоретические и инженерные основы методов конечных элементов.</li> <li>3. Способы алгоритмизации расчетов при исследовании и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материала и строительной механики.</li> </ol>	<p>Отлично</p> <p>Уверенно знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивление материалов, расчеты машиностроительных конструкций, современные средства вычислительной техники.</li> <li>2. Теоретические и инженерные основы методов конечных элементов.</li> <li>3. Способы алгоритмизации расчетов при исследовании и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материала и строительной механики.</li> </ol>

<p>Второй этап (уровень)</p>	<p>Умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания.</li> <li>2. Формировать расчетные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчетов методом конечных элементов.</li> <li>3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.</li> </ol>	<p>Не умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания.</li> <li>2. Формировать расчетные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчетов методом конечных элементов.</li> <li>3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.</li> </ol>	<p>Умеет частично:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания.</li> <li>2. Формировать расчетные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчетов методом конечных элементов.</li> <li>3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.</li> </ol>	<p>Достаточно хорошо умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания.</li> <li>2. Формировать расчетные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчетов методом конечных элементов.</li> <li>3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.</li> </ol>	<p>Уверенно умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания.</li> <li>2. Формировать расчетные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчетов методом конечных элементов.</li> <li>3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.</li> </ol>
------------------------------	---	--	--	---	--



Третий этап (уровень)	<p>Владеть:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой.</li> <li>2. Приёмами работы с программными до- с т у п н ы м и</li> </ol>	<p>Не владеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой.</li> <li>2. Приёмами работы с программными до- с т у п н ы м и</li> </ol>	<p>Владеет частично:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой.</li> <li>2. Приёмами работы с программными до- с т у п н ы м и</li> </ol>	<p>Достаточно хорошо владеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой.</li> <li>2. Приёмами работы с программными до- с т у п н ы м и</li> </ol>	<p>Уверенно владеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой.</li> <li>2. Приёмами работы с программными до- с т у п н ы м и</li> </ol>
-----------------------	--	---	---	--	---

Показатели сформированности компетенции: (годится для бакалавров и специалистов дневного отделения, т.к. для заочной формы обучения и для магистрантов всех форм обучения не используется балльно-рейтинговая система, поэтому текст, приведенный ниже, не подходит, расписывается шкала оценивания).

Критериями оценивания являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (для экзамена: текущий контроль – максимум 40 баллов; рубежный контроль – максимум 30 баллов, поощрительные баллы – максимум 10; для зачета: текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

(для экзамена:

от 45 до 59 баллов – «удовлетворительно»;

от 60 до 79 баллов – «хорошо»;

от 80 баллов – «отлично».

для зачета:

зачтено – от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

не зачтено – от 0 до 59 рейтинговых баллов).

**4.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Этапы освоения	Результаты обучения	Компетенция	Оценочные средства
1-й этап Знания	1. Фундаментальные основы высшей математики, сопротивления материалов, расчётов машиностроительных конструкций современные средства вычислительной техники. 2. Теоретические и инженерные основы методы конечных элементов. 3. Способы алгоритмизации расчётов при исследованиях и проектировании машиностроительных конструкций на основе численных методов сопротивления материалов и строительной механики.	Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5)	Устный опрос, контрольная работа
2-й этап Умения	1. Самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по инженерным наукам, работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять на практике инженерные знания. 2. Формировать расчётные схемы, анализировать исходные данные и результаты расчётов методом конечных элементов. 3. Составить, в соответствии с действующими стандартами, грамотный технический отчет о проведенных расчетах и дать аргументированные рекомендации по дальнейшим исследованиям и разработкам.	Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5)	Устный опрос, контрольная работа
3-й этап Владение навыками	1. Навыками и методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчетов, оформления результатов расчета, современной научной литературой. 2. Приёмами работы с программными	Способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования (ПК-5)	Устный опрос, контрольная работа

**К оценочным средствам можно отнести:** Индивидуальный, групповой опрос; тестирование; письменные ответы на вопросы; устный опрос (вопросы для самоконтроля); лабораторные работы; контрольные работы; собеседование; доклад; сообщение; задача; практическое задание; реферат; тесты; коллоквиум; отчет (по практикам, научно-исследовательской работе студентов и т.п.); научный доклад по теме НИРС; кейс-задача; комплексное практическое задание, проект; творческие задания (выступления, презентации, подготовка кроссворда и пр.); эссе; статья; ситуационные задачи и тесты; круглый стол; диспут; дискуссия; мозговой штурм; деловые, ролевые игры; рабочая тетрадь; тренинги; компьютерные симуляции, тренажеры; задания с использованием интерактивной доски и т.д.



### **4.3 Рейтинг-план дисциплины** (при необходимости)

Рейтинг–план дисциплины представлен в приложении 2.

*Далее описываются все оценочные средства, указанные в таблице выше, и методика их оценивания. При наличии экзамена приложить образцы билетов и методику оценивания на экзамене (от 0 до 30 при использовании модульно-рейтинговой системы и описание для тех программ, где рейтинговая система не используется).*

### **Экзаменационные билеты**

Экзамен является оценочным средством для всех этапов освоения компетенций.

Структура экзаменационного билета:

*(описать)*

#### **Примерные вопросы для экзамена:**

Тема 1. Основные понятия и определения

1. Основная концепция метода конечных элементов.
2. Разбиение области на элементы.
3. Определение узловых точек и элементов.
4. Нумерация узлов.
5. Типы конечных элементов.

Тема 2. Конечный элемент. Матрица жесткости конечного элемента

1. Классификация конечных элементов.
2. Одномерный симплекс-элемент.
3. Двумерный симплекс-элемент.
4. Трехмерный симплекс-элемент.
5. Интерполирование векторных величин.

Тема 3. Преобразование матрицы жесткости при переходе от одной системы координат к другой

1. Общая теория кручения стержня.
2. Построение матриц элементов.
3. Стандартные результаты элемента.
4. Согласованные результаты элемента.
5.  $L$  – координаты.

Тема 4. Пример построения матрицы жесткости элемента

1. Уравнение переноса тепла.
2. Одномерный случай переноса тепла.
3. Двумерный перенос тепла.
4. Трехмерный случай переноса тепла.
5. Преобразования координат.

Тема 5. Формирование и решение системы уравнений МКЭ.

Определение внутренних усилий в элементах

1. Квадратичные и кубичные элементы.
2. Применение квадратичного элемента.
3. Естественная система координат.
4. Преобразования координат. Матрица Якоби.
5. Применение численного интегрирования при определении матриц элемента.

Тема 6. Примеры расчетов механических систем методом конечных элементов

1. Теория упругости.
2. Одномерный случай.

3. Напряжения в элементах.
4. Двумерные задачи теории упругости.
5. Трехмерные задачи теории упругости.

**Примеры экзаменационного билета:**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Башкирский государственный университет»  
Инженерный факультет  
Кафедра «Технологические машины и оборудование»

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**

По учебной дисциплине «Метод конечных элементов»  
Направление: 15.03.02 – Технологические машины и оборудование  
Профиль: Инжиниринг технологического оборудования

1. Основная концепция метода конечных элементов.
2. Построение матриц элементов.
3. Задача.

Утверждено на заседании кафедры \_\_\_\_\_, протокол № \_\_\_\_  
(дата)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (Ф.И.О.)

Критерии оценки прописаны в рабочей программе учебной дисциплины.

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Башкирский государственный университет»  
Инженерный факультет  
Кафедра «Технологические машины и оборудование»

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2**

По учебной дисциплине «Метод конечных элементов»  
Направление: 15.03.02 – Технологические машины и оборудование  
Профиль: Инжиниринг технологического оборудования

1. Разбиение области на элементы.
2. Квадратичные и кубичные элементы.
3. Задача.

Утверждено на заседании кафедры \_\_\_\_\_, протокол № \_\_\_\_  
(дата)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись) (Ф.И.О.)

Критерии оценки прописаны в рабочей программе учебной дисциплины.

Перевод оценки из 100-балльной в четырехбалльную производится следующим образом:  
- отлично – от 80 до 110 баллов (включая 10 поощрительных баллов);  
- хорошо – от 60 до 79 баллов;

- удовлетворительно – от 45 до 59 баллов;
- неудовлетворительно – менее 45 баллов.

Примерные критерии оценивания ответа на экзамене (только для тех, кто учится с использованием модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов):

**Критерии оценки (в баллах):**

**25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы. Практическая часть работы выполнена полностью без неточностей и ошибок;

**17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности. При выполнении практической части работы допущены несущественные ошибки;

**10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос. Студент не решил задачу или при решении допущены грубые ошибки;

**1-10 баллов** выставляется студенту, если ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Обнаруживается отсутствие навыков применения теоретических знаний при выполнении практических заданий. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

## Задания для контрольных работ

### Пример варианта контрольной работы №1

#### РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Для заданной расчетной схемы бруса, используя метод конечных элементов, требуется определить:

- узловые перемещения;
- реакции в опорах;
- напряжения в конечных элементах.

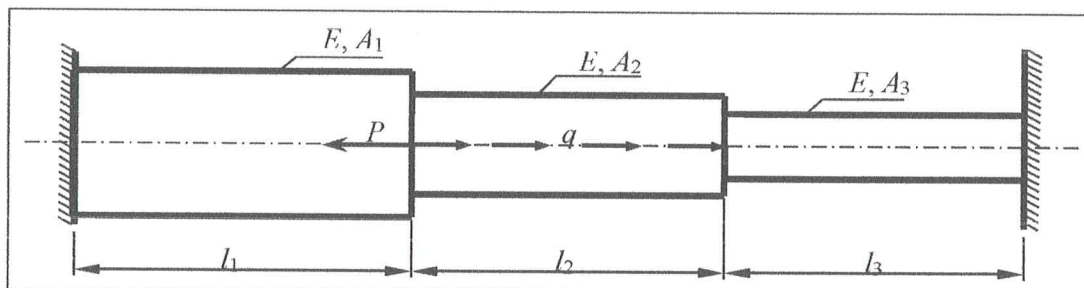
Модуль упругости принять  $E=2 \cdot 10^5$  МПа.



## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Площади сечений участков, см <sup>2</sup>			Длины участков, м			Нагрузка	
$A_1$	$A_2$	$A_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$P$ , кН	$q$ , кН/м
34	16	10	2,0	3,0	2,5	6	3

## ВАРИАНТ СХЕМЫ



### Решение

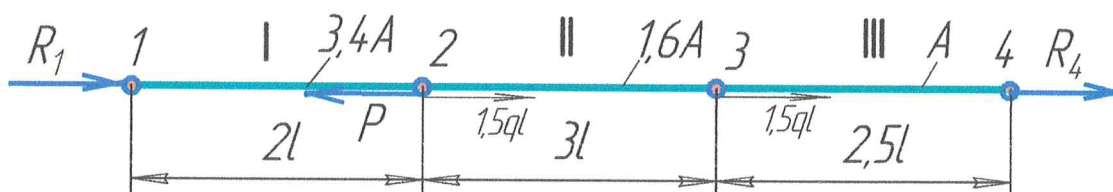
Выполним некоторые подготовительные операции.

Пусть  $A=10\text{см}^2$ ,  $l=1\text{м}$ , тогда,  $A_1=3,4A$ ;  $A_2=1,6A$ ;  $A_3=A$ ;  $l_1=2l$ ;  $l_2=3l$ ;  $l_3=2,5l$ .

Заданную нагрузку преобразуем следующим образом:

- 1) в опорах действуют реакции  $R_1$  и  $R_4$ , которые тоже являются внешними силами;
- 2) распределенная нагрузка действует на длине одного элемента, однако МКЭ учитывает только нагрузку, приложенную в узлах, поэтому, всю нагрузку  $q$  следует равномерно распределить по узлам этого элемента.

Составим конечно-элементную расчетную схему, на которой обозначим: (I, II, III) – конечные элементы, (1, 2, 3, 4) – узлы, ( $R_1$ ,  $R_4$ ) – неизвестные реакции в опорах.



### 1 Составление матриц жесткости конечных элементов

В общем виде матрица жесткости для стержневого  $i$ -го конечного элемента имеет вид:

$$k_i = \frac{E \cdot A_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $E$  – модуль упругости;  $A_i$  – площадь поперечного сечения элемента;  $l_i$  – длина элемента.

Элемент I (1-2)

$$k_1 = \frac{E \cdot 3,4A}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1,7 & -1,7 \\ -1,7 & 1,7 \end{bmatrix}.$$

Цифры над коэффициентами в матрице жесткости называют адресами. Они определяют место коэффициентов в общей матрице жесткости всей системы (первая цифра – номер строки, вторая – номер столбца). Адреса проставляют в зависимости от номеров узлов, которые соединяет элемент.

Элемент 2 (2-3)

$$k_2 = \frac{E \cdot 1,6A}{3l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0,53 & -0,53 \\ -0,53 & 0,53 \end{bmatrix}.$$

Элемент 3 (3-4)

$$k_3 = \frac{E \cdot A}{2,5l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0,4 & -0,4 \\ -0,4 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

## 2 Составление общей матрицы жесткости

Используя адреса, объединим составленные матрицы жесткости отдельных элементов в общую матрицу жесткости (при совпадении адресов коэффициенты складываются). Пустые ячейки заполняются нолями.

$$K = \frac{E \cdot A}{l} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1,7 & -1,7 & 0 & 0 \\ -1,7 & 2,23 & -0,53 & 0 \\ 0 & -0,53 & 0,93 & -0,4 \\ 0 & 0 & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Правильно составленная матрица жесткости должна быть симметричной относительно главной диагонали.

## 3 Составление уравнения равновесия системы

Уравнение равновесия имеет вид:

$$K \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений узлов;  $\mathbf{F}$  – вектор внешних нагрузок, приложенных к каждому узлу.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

т.к. 1-й и 4-й узлы находятся в опорах и их перемещения равны нулю.

$$\text{Вектор внешних нагрузок равен: } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ -P + 1,5ql \\ 1,5ql \\ R_4 \end{bmatrix}.$$

Окончательно уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1,7 & -1,7 & 0 & 0 \\ -1,7 & 2,23 & -0,53 & 0 \\ 0 & -0,53 & 0,93 & -0,4 \\ 0 & 0 & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ -P + 1,5ql \\ 1,5ql \\ R_4 \end{bmatrix}.$$

## 4 Определение неизвестных перемещений узлов

Поскольку перемещение первого и четвертого узлов равны нулю, можно вычеркнуть соответствующие строчки и столбцы матрицы жесткости, в результате чего последнее матрично-векторное уравнение примет вид

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2,23 & -0,53 \\ -0,53 & 0,93 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P + 1,5ql \\ 1,5ql \end{bmatrix}.$$

Или в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{EA}{l}(2,23u_2 - 0,53u_3) = -P + 1,5ql; \\ \frac{EA}{l}(-0,53u_2 + 0,93u_3) = 1,5ql. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 4,2 и сложим уравнения системы, тогда

$$-0,53u_3 + 4,2 \cdot 0,93u_3 = \frac{l(-P + 1,5ql + 4,2 \cdot 1,5ql)}{EA}.$$

Отсюда

$$u_3 = \frac{(-P + 7,8ql) \cdot l}{EA} = \frac{(-6 \cdot 10^3 + 7,8 \cdot 3 \cdot 10^3) \cdot 10^3}{3,38 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3} \approx 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Тогда

$$u_2 = \frac{\left(\frac{l(-P + 1,5ql)}{EA} + 0,53u_3\right)}{2,23} = \frac{\left(\frac{10^3(-6 \cdot 10^3 + 1,5 \cdot 3 \cdot 10^3)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3} + 0,53 \cdot 8,7 \cdot 10^{-2}\right)}{2,23} \approx 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Таким образом, узлы 2 и 3 переместятся вправо, т.е. первый конечный элемент будет растянут, а третий – сжат.

### 5 Определение реакций опор

Первое уравнение равновесия можно записать в виде

$$\frac{EA}{l}(-1,7u_2) = R_1.$$

Отсюда

$$R_1 = -\frac{EA \cdot 1,7u_2}{l} = -\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3(0,3 \cdot 10^{-2})}{10^3} \approx -940 \text{ Н.}$$

Четвертое уравнение равновесия запишем в виде

$$\frac{EA}{l}(-0,4u_3) = R_4,$$

таким образом,

$$R_4 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot (-0,4(2,6 \cdot 10^{-2}))}{10^3} \approx -2050 \text{ Н.}$$

В качестве проверки определим сумму проекций сил на горизонтальную ось.

$$\sum F_x = R_1 - P + 3ql + R_4 = -940 - 6000 + 3 \cdot 3 \cdot 1000 - 2050 \approx 0.$$

### 6 Определение напряжений в элементах

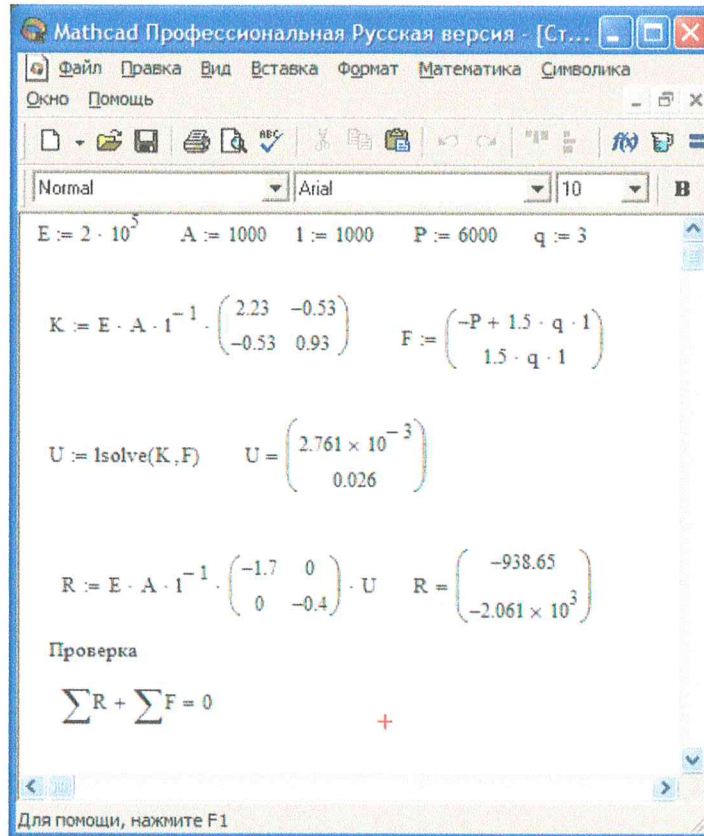
$$\sigma_I = \frac{E(u_2 - u_1)}{l_1} = \frac{2 \cdot 10^5(0,3 \cdot 10^{-2})}{2 \cdot 10^3} \approx 0,3 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{II} = \frac{E(u_3 - u_2)}{l_2} = \frac{2 \cdot 10^5(2,6 \cdot 10^{-2} - 0,3 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^3} \approx 1,84 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{III} = \frac{E(u_4 - u_3)}{l_3} = \frac{2 \cdot 10^5(-2,6 \cdot 10^{-2})}{2,5 \cdot 10^3} \approx -2,1 \text{ МПа.}$$

Расчеты показывают, что первый конечный элемент будет испытывать сжатие, а второй и третий – растяжение.

Проверим полученные решения в системе Mathcad:



Результаты расчетов совпадают!

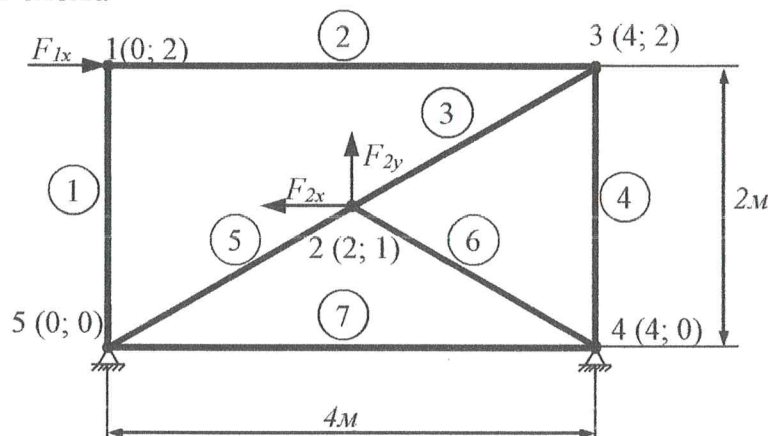
## Пример варианта контрольной работы №2

### РАСЧЕТ ФЕРМЫ

Для заданной фермы необходимо определить: перемещения узлов; реакции опор; напряжения в стержнях.

Дано  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $A=20$  см<sup>2</sup>;  $F_{1x} = 5$  кН;  $F_{2x} = -8$  кН;  $F_{2y} = 10$  кН.

Расчетная схема

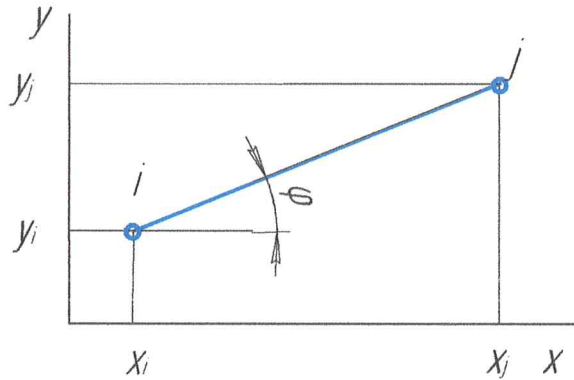


### Решение

#### 1 Составление матриц жесткости конечных элементов



Изобразим стержневой элемент в глобальной системе координат



Матрица жесткости для всех конечных элементов имеет одинаковый вид:

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix},$$

где  $L$  – длина элемента:  $L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ ;

$l$  и  $m$  – косинус и синус угла наклона элемента к горизонтальной оси:

$$l = \cos \varphi = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad m = \sin \varphi = \frac{y_j - y_i}{L}.$$

$x, y$  – координаты узлов.

В соответствии с приведенными формулами составим матрицы жесткости для каждого элемента. Эти матрицы состоят из четырех ячеек. Следует проставить адреса этих ячеек, определяющие их положение в общей матрице жесткости. Они соответствуют номерам узлов, которые соединяет элемент.

Элемент 1 (1(0;2) – 5(0;0)).

$$L_1 = 2\text{м}; l = \frac{0-0}{2} = 0; m = \frac{0-2}{2} = -1; l^2 = 0; m^2 = (-1)^2 = 1; \\ lm = 0 \cdot (-1) = 0.$$

$$k_1 = \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Элемент 2 (1(0;2) – 3(4;2)).

$$L_2 = 4\text{м}; l = \frac{4-0}{4} = 1; m = \frac{2-2}{4} = 0; l^2 = 1; m^2 = 0; \\ lm = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$k_2 = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элемент 3 (2(2;1) – 3(4;2)).

$$L_3 = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} = 2,24\text{М}; l = \frac{4-2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; m = \frac{2-1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,8; m^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,2; lm = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4.$$

$$k_3 = \frac{EA}{2,24} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 & -0,8 & -0,4 \\ 0,4 & 0,2 & -0,4 & -0,2 \\ -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,4 \\ -0,4 & -0,2 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,36 & 0,18 & -0,36 & -0,18 \\ 0,18 & 0,09 & -0,18 & -0,09 \\ -0,36 & -0,18 & 0,36 & 0,18 \\ -0,18 & -0,09 & 0,18 & 0,09 \end{bmatrix}.$$

Элемент 4 (3(4;2) – 4(4;0)).

$$L_4 = 2\text{М}; l = \frac{4-4}{2} = 0; m = \frac{0-2}{2} = -1; l^2 = 0; m^2 = (-1)^2 = 1;$$

$$lm = 0 \cdot (-1) = 0.$$

$$k_4 = \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Элемент 5 (2(2;1) – 5(0;0)).

$$L_5 = \sqrt{(0-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} = 2,24\text{М}; l = \frac{0-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}; m = \frac{0-1}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}};$$

$$l^2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,8; m^2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,2; lm = \frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = 0,4.$$

$$k_5 = \frac{EA}{2,24} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 & -0,8 & -0,4 \\ 0,4 & 0,2 & -0,4 & -0,2 \\ -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,4 \\ -0,4 & -0,2 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,36 & 0,18 & -0,36 & -0,18 \\ 0,18 & 0,09 & -0,18 & -0,09 \\ -0,36 & -0,18 & 0,36 & 0,18 \\ -0,18 & -0,09 & 0,18 & 0,09 \end{bmatrix}.$$

Элемент 6 (2(2;1) – 4(4;0)).

$$L_6 = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} = 2,24\text{М}; l = \frac{4-2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; m = \frac{0-1}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}};$$

$$l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,8; m^2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,2; lm = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = -0,4.$$

$$k_6 = \frac{EA}{2,24} \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,8 & 0,4 \\ -0,4 & 0,2 & 0,4 & -0,2 \\ -0,8 & 0,4 & 0,8 & -0,4 \\ 0,4 & -0,2 & -0,4 & 0,2 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,36 & -0,18 & -0,36 & 0,18 \\ -0,18 & 0,09 & 0,18 & -0,09 \\ -0,36 & 0,18 & 0,36 & -0,18 \\ 0,18 & -0,09 & -0,18 & 0,09 \end{bmatrix}.$$

Элемент 7 (4(4;0) – 5(0;0)).

$$L_7 = 4\text{М}; l = \frac{0-4}{4} = -1; m = \frac{0-0}{4} = 0; l^2 = 1; m^2 = 0;$$

$$lm = (-1) \cdot 0 = 0.$$

$$k_7 = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 2 Составление общего уравнения равновесия

Уравнение равновесия для всей фермы имеет вид:

$$K \cdot U = F,$$

где  $K$  – общая матрица жесткости (должна получиться симметричной относительно главной диагонали, порядок матрицы равен произведению количества узлов на количество степеней свободы узла):

$$K = EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1,08 & 0,18 & -0,36 & -0,18 & -0,36 & 0,18 & -0,36 & -0,18 \\ 0 & 0 & 0,18 & 0,27 & -0,18 & -0,09 & 0,18 & -0,09 & -0,18 & -0,09 \\ -0,25 & 0 & -0,36 & -0,18 & 0,61 & 0,18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,18 & -0,09 & 0,18 & 0,59 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,18 & 0 & 0 & 0,61 & -0,18 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,18 & -0,09 & 0 & -0,5 & -0,18 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & -0,18 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0,61 & 0,18 \\ 0 & -0,5 & -0,18 & -0,09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,18 & 0,59 \end{bmatrix}.$$

$U$  – вектор перемещений;  $F$  – вектор внешних нагрузок.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} \text{ кН.}$$

Вектор перемещений составлен с учетом того, что в 4-м и 5-м узле перемещения по вертикали и горизонтали отсутствуют, так как в этих узлах находятся шарнирно-неподвижные опоры.

В вектор внешних нагрузок были вписаны силы, приложенные к 1-му и 2-му узлу, в 3-м узле внешние нагрузки отсутствуют, поэтому на их месте стоят нули. На 4-й и 5-й узел действуют реакции опор, которые пока не найдены.

В общем уравнении равновесия вектор перемещений умножается на матрицу жесткости. При этом 7-й, 8-й, 9-й и 10-й столбец умножается на ноль, т.е. их можно сразу вычеркнуть. Также следует вычеркнуть 7-ю, 8-ю, 9-ю и 10-ю строчку, поскольку в них присутствуют неизвестные пока реакции опор. После сокращения уравнение равновесия примет вид:

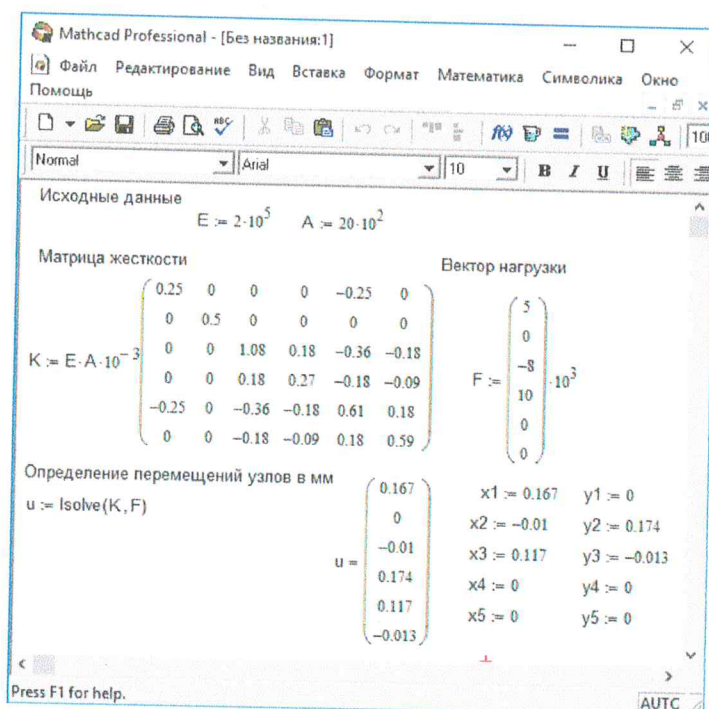
$$EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,08 & 0,18 & -0,36 & -0,18 \\ 0 & 0 & 0,18 & 0,27 & -0,18 & -0,09 \\ -0,25 & 0 & -0,36 & -0,18 & 0,61 & 0,18 \\ 0 & 0 & -0,18 & -0,09 & 0,18 & 0,59 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3.$$



В этом уравнении приложенные силы переведены в [Н].

### 3 Решение системы линейных алгебраических уравнений

Решив составленное уравнение равновесия, получим вектор неизвестных перемещений. Этот расчет выполним в программе Mathcad.



Таким образом, получены следующие значения узловых перемещений:  
 $u_1 = 1,594 \cdot 10^{-4}$  м;  $v_1 = 0$ ;  $u_2 = -9,921 \cdot 10^{-6}$  м;  $v_2 = 1,653 \cdot 10^{-4}$  м;  
 $u_3 = 1,118 \cdot 10^{-4}$  м;  $v_3 = -1,19 \cdot 10^{-5}$ ;  $u_4 = 0$ ;  $v_4 = 0$ ;  $u_5 = 0$ ;  $v_5 = 0$ .

### 4 Определение реакций в опорах

Для определения реакций в опорах следует перемножить полученный вектор перемещений на соответствующую строку в матрице жесткости. Т.е. перемножив вектор  $U$  на 7-ю строку общей матрицы жесткости  $K$ , получим реакцию  $F_{4x}$ ; перемножив вектор  $U$  на 8-ю строку, получим реакцию  $F_{4y}$  и т.д. Причем при перемножении вычеркнутые столбцы можно не учитывать, т.к. они все равно умножаются на ноль.

$$F_{4x} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 0 + (-0,36) \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + 0,18 \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = 1,4 \cdot 10^4 \text{ H} = 14 \text{ кН}.$$

$$F_{4y} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 0 + 0,18 \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + (-0,09) \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + (-0,5) \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = -4,5 \cdot 10^3 \text{ H} = -4,5 \text{ кН}.$$

$$F_{5x} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 0 + (-0,36) \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + (-0,18) \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = -1,1 \cdot 10^4 \text{ H} = -11 \text{ кН}.$$

$$F_{5y} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + (-0,5) \cdot 0 + (-0,18) \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + (-0,36) \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = -5,5 \cdot 10^3 \text{ H} = -5,5 \text{ кН}.$$

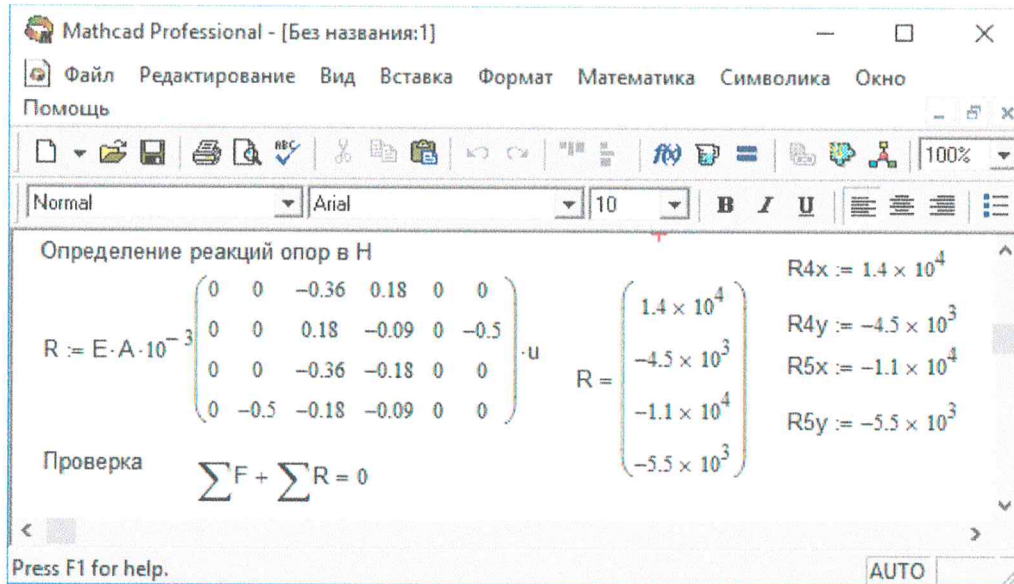
Эту же операцию можно выполнить в программе Mathcad. Для этого нужно перемножить вырезанные строки матрицы жесткости с полученным вектором перемещений.

## 5 Проверка

Правильность проведенных вычислений можно проверить, составив уравнения статики – сумму проекций сил на ось X и сумму проекций сил на ось Y.

$$\sum X = 0; \quad 5 - 8 + 14 - 11 = 0.$$

$$\sum Y = 0; \quad 10 - 4,5 - 5,5 = 0.$$



## 6 Определение напряжений в элементах

Напряжение в элементе определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{E}{L} [-l \quad -m \quad l \quad m] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Элемент 1 (1 – 5)

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2} [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1,594 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Элемент 2 (1 – 3)

$$\sigma_2 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{4} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1,594 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 1,118 \cdot 10^{-4} \\ -0,119 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = -2,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -2,5 \text{ МПа}.$$

Элемент 3 (2 – 3)

$$\sigma_3 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,24} [-0,89 \quad -0,45 \quad 0,89 \quad 0,45] \cdot \begin{bmatrix} -9,921 \cdot 10^{-6} \\ 1,653 \cdot 10^{-4} \\ 1,118 \cdot 10^{-4} \\ -0,119 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = 2,7 \text{ МПа}.$$

Mathcad Professional - [Без названия:1]

Файл Редактирование Вид Вставка Формат Математика Символика Окно  
Помощь

Normal Arial 10 B I U

Определение напряжений в сечениях конечных элементов в МПа

$l1 := 0$     $m1 := -1$     $l2 := 1$     $m2 := 0$     $l3 := 0.89$     $m3 := 0.45$     $l4 := 0$     $m4 := -1$   
 $l5 := -0.89$     $m5 := -0.45$     $l6 := 0.89$     $m6 := -0.45$     $l7 := -1$     $m7 := 0$     $L1 := 2000$   
 $L6 := 2240$     $L5 := 2240$     $L2 := 4000$     $L3 := 2240$     $L4 := 2000$     $L7 := 4000$

$\sigma_1 := E \cdot L1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l1 & -m1 & l1 & m1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ x5 \\ y5 \end{pmatrix}$        $\sigma_1 = (0)$

$\sigma_2 := E \cdot L2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l2 & -m2 & l2 & m2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ x3 \\ y3 \end{pmatrix}$        $\sigma_2 = (-2.5)$

$\sigma_3 := E \cdot L3^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l3 & -m3 & l3 & m3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ x3 \\ y3 \end{pmatrix}$        $\sigma_3 = (2.579)$

$\sigma_4 := E \cdot L4^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l4 & -m4 & l4 & m4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ x4 \\ y4 \end{pmatrix}$        $\sigma_4 = (-1.3)$

$\sigma_5 := E \cdot L5^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l5 & -m5 & l5 & m5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ x5 \\ y5 \end{pmatrix}$        $\sigma_5 = (6.196)$

$\sigma_6 := E \cdot L6^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l6 & -m6 & l6 & m6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ x4 \\ y4 \end{pmatrix}$        $\sigma_6 = (7.786)$

$\sigma_7 := E \cdot L7^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -l7 & -m7 & l7 & m7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x4 \\ y4 \\ x5 \\ y5 \end{pmatrix}$        $\sigma_7 = (0)$

+

Press F1 for help.      AUTO



Элемент 4 (3 – 4)

$$\sigma_4 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2} [0 \ 1 \ 0 \ -1] \cdot \begin{vmatrix} 1,118 \cdot 10^{-4} \\ -0,119 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 1,25 \text{ МПа.}$$

Элемент 5 (2 – 5)

$$\sigma_5 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,24} [0,89 \ 0,45 \ -0,89 \ -0,45] \cdot \begin{vmatrix} -9,921 \cdot 10^{-6} \\ 1,653 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 6,2 \text{ МПа.}$$

Элемент 6 (2 – 4)

$$\sigma_6 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,24} [-0,89 \ 0,45 \ 0,89 \ -0,45] \cdot \begin{vmatrix} -9,921 \cdot 10^{-6} \\ 1,653 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 7,74 \text{ МПа.}$$

Элемент 7 (4 – 5)

$$\sigma_7 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2} [1 \ 0 \ -1 \ 0] \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0.$$

## Пример варианта контрольной работы №3

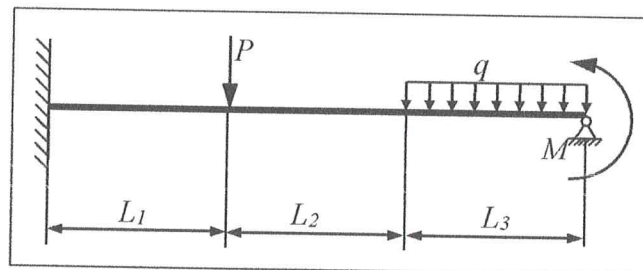
### РАСЧЕТ БАЛКИ

Для заданной расчетной схемы балки определить опорные реакции, перемещения и углы поворота в узлах.

Принять:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $I = 2000 \text{ см}^4$ .

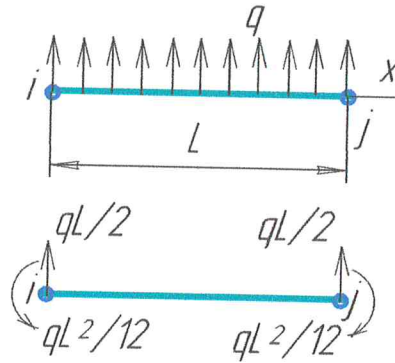
### Исходные данные

Длина, м			Нагрузка		
$L_1$	$L_2$	$L_3$	$P$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кНм
0,7	0,8	1,9	26	20	12

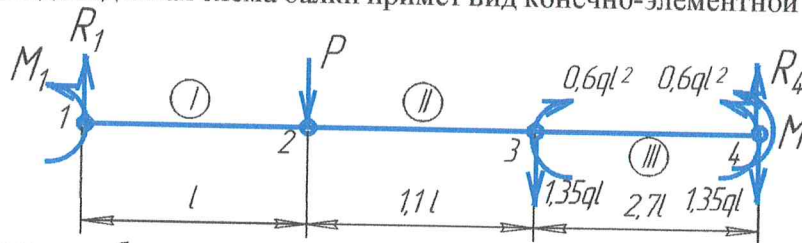


### Решение

Для того, чтобы составить конечно-элементную расчетную схему и правильно записать вектор нагрузок в уравнении равновесия, приведем заданную распределенную нагрузку к эквивалентным силам и моментам, сосредоточенным в узлах схемы, согласно изображенному правилу.



Обозначим I, II и III конечные элементы, а 1,2,3 и 4 – их узлы, примем  $l = 0,7\text{м}$ ;  $l_1=l$ ;  $l_2=1,1l$ ;  $l_3=2,7l$ ; тогда заданная схема балки примет вид конечно-элементной расчетной схемы:



В общем виде глобальное уравнение равновесия имеет вид:

$$K \cdot U = F,$$

где  $K$  – глобальная матрица жесткости (должна получиться симметричной относительно главной диагонали);  $U$  – вектор перемещений узлов;  $F$  – вектор внешних сил – нагрузок.

В общем виде матрица жесткости конечного элемента при изгибе имеет вид:

$$k_i = \frac{EI_i}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ 6l_i & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ -12 & -6l_i & 12 & -6l_i \\ 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix},$$

где  $I_i$  – момент инерции сечения,  $l_i$  – длина.

Составим матрицы жесткости для каждого элемента. Эти матрицы состоят из четырех ячеек. Проставим адреса этих ячеек, определяющие их положение в общей матрице жесткости. Они соответствуют номерам узлов, которые соединяет элемент. В общей матрице жесткости ячейки с одинаковыми номерами складываются поэлементно.

Элемент I (1-2)

$$k_2 = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12^{11} & 6l & -12^{12} & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

Элемент II (2-3)

$$k_2 = \frac{EI}{(1,1l)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6,6l & -12 & 6,6l \\ 6,6l & 4,8l^2 & -6,6l & 2,4l^2 \\ -12 & -6,6l & 12 & -6,6l \\ 6,6l & 2,4l^2 & -6,6l & 4,8l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^{22} & 5l & -9^{23} & 5l \\ 5l & 3,6l^2 & -5l & 1,8l^2 \\ -9 & -5l & 9 & -5l \\ 5l & 1,8l^2 & -5l & 3,6l^2 \end{bmatrix}.$$

Элемент III (3-4)

$$k_3 = \frac{EI}{(2,7l)^3} \begin{bmatrix} 12 & 16,2l & -12 & 16,2l \\ 16,2l & 29,2l^2 & -16,2l & 14,6l^2 \\ -12 & -16,2l & 12 & -16,2l \\ 16,2l & 14,6l^2 & -16,2l & 29,2l^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0,6^{33} & 0,82l & -0,6^{34} & 0,82l \\ 0,82l & 1,48l^2 & -0,82l & 0,74l^2 \\ -0,6 & -0,82l & 0,6 & -0,82l \\ 0,82l & 0,74l^2 & -0,82l & 1,48l^2 \end{bmatrix}.$$

Запишем глобальную матрицу жесткости:

$$K = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 21 & -l & -9 & 5l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -l & 7,6l^2 & -5l & 1,8l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -5l & 9,6 & -4,2l & -0,6 & 0,82l \\ 0 & 0 & 5l & 1,8l^2 & -4,2l & 5l^2 & -0,82l & 0,74l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & -0,82l & 0,6 & -0,82l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,82l & 0,74l^2 & -0,82l & 1,48l^2 \end{bmatrix}.$$

Составим глобальное уравнение равновесия учетом внешней нагрузки, и закреплений опорных узлов:

$$\frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 21 & -l & -9 & 5l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -l & 7,6l^2 & -5l & 1,8l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -5l & 9,6 & -4,2l & -0,6 & 0,82l \\ 0 & 0 & 5l & 1,8l^2 & -4,2l & 5l^2 & -0,82l & 0,74l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & -0,82l & 0,6 & -0,82l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,82l & 0,74l^2 & -0,82l & 1,48l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ -P \\ 0 \\ -1,35ql \\ -0,6ql^2 \\ R_4 - 1,35ql \\ M + 0,6ql^2 \end{bmatrix}.$$

Для определения неизвестных перемещений из этого уравнения следует вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям узлов, т.е. строки и столбцы с номерами 1, 2 и 7.

Полученная при этом матрица жесткости должна быть симметричной относительно главной диагонали.

Решая эту систему уравнений, получаем вектор неизвестных перемещений  $U$ .

Умножим найденный вектор перемещений на 1-ю, 2-ю и 7-ю строки глобального уравнения равновесия, получим уравнение для определения реакций опор в матричном виде:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_4 - 1,35ql \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 & -0,82l & -0,82l \end{bmatrix} \cdot U.$$

Описанные выше расчеты выполним в программном комплексе MathCad.

Получены следующие значения реакций опор:

$$R_1 = 43,5 \text{ кН}; \quad M_1 = 35,5 \text{ Нм}; \quad R_4 = 20,7 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum F_y = R_1 - 2,7ql - P + R_3 = 43,5 - 2,7 \cdot 20 \cdot 0,7 - 26 + 20,7 \approx 0.$$

Получены следующие значения перемещений узлов:

$$v_2 = -1,5 \text{ мм}; \quad \theta_2 \approx 0; \quad v_3 = -4,1 \text{ мм}; \quad \theta_3 \approx 0; \quad \theta_4 \approx 0;$$

$$E := 2 \cdot 10^5 \quad I := 2 \cdot 10^7 \quad P := 26 \cdot 10^3 \quad q := 20 \quad M := 12 \cdot 10^6 \quad l := 700$$

$$K := E \cdot I \cdot I^{-3} \begin{pmatrix} 21 & -1 & -9 & 5l & 0 \\ -1 & 7.6l^2 & -5l & 1.8l^2 & 0 \\ -9 & -5l & 9.6 & -4.2l & 0.82l \\ 5l & 1.8l^2 & -4.2l & 5l^2 & 0.74l^2 \\ 0 & 0 & 0.82l & 0.74l^2 & 1.48l^2 \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ -1.35q \cdot l \\ -0.6q \cdot l^2 \\ M + 0.6q \cdot l^2 \end{pmatrix}$$

$$U := \text{lsolve}(K, F)$$

$$U = \begin{pmatrix} -1.554 \\ -3.55 \times 10^{-3} \\ -4.14 \\ -2.672 \times 10^{-3} \\ 6.728 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$R := E \cdot I \cdot I^{-3} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & -0.82l & -0.82l \end{pmatrix} \cdot U$$

$$R = \begin{pmatrix} 4.351 \times 10^4 \\ 3.552 \times 10^7 \\ 1.826 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$R4 := 1.826 \times 10^3 + 1.35q \cdot l$$

$$R4 = 2.073 \times 10^4$$

### Описание методики оценивания:

**Критерии оценки (в баллах)** (должны строго соответствовать рейтинг плану по *max* и *min* количеству баллов и только для тех, кто учится с использованием модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов):

- 15 баллов выставляется студенту, если предложенная для решения задача решена полностью, правильно, с необходимыми пояснениями и выводами;
- 10 баллов выставляется студенту, если в решении задачи имеются незначительные неточности, пояснения не полные, выводы отсутствуют;
- 5 баллов выставляется студенту, если в решении имеются существенные неточности, пояснения и выводы отсутствуют;
- 0 баллов выставляется студенту, если отсутствуют намеки на решение.



## Аудиторная работа

Описание методики оценивания:

**Критерии оценки (в баллах)** (должны строго соответствовать рейтинг плану по *max* и *min* количеству баллов и только для тех, кто учится с использованием модульно-рейтинговой системы обучения и оценки успеваемости студентов):

- 10 баллов выставляется студенту, если он с полной отдачей работал на занятии, проявляя здоровую заинтересованность, правильно отвечал на поставленные вопросы, примерно вел себя;
- 7 баллов выставляется студенту, если он недостаточно активно работал на занятии, проявляя слабую заинтересованность, делал ошибки, отвечая на поставленные вопросы, примерно вел себя;
- 2 баллов выставляется студенту, если он не активно работал на занятии, не проявлял заинтересованность, делал ошибки, отвечая на поставленные вопросы, отвлекался посторонними делами;
- 0 баллов выставляется студенту, если он на протяжении всего занятия был занят посторонними делами, неоднократно получал замечания от преподавателя.

## Устный опрос

Методика оценивания аналогична предыдущей, только это касается ответов на поставленные преподавателем вопросы в соответствии со сложившейся на занятии учебной ситуацией.

## **5 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература**

1. Крылов О.В. Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах (учебное пособие для ВУЗов). – М.: Радио и связь, 2002. – 104с.
2. Метод конечных элементов: Методические указания для выполнения расчетно-графических работ, курсовых и дипломных проектов / Абдуллин Н.А., Райский В.В. – Уфа: БашГУ, 2016 – 56 с.
3. Метод конечных элементов. Тесты с комментариями: Учебное пособие/ Г.Г.Бурцев, А.А.Овчаренко, А.С.Овчаренко, В.В.Райский – Уфа: БашГУ, 2016. – 80 с.

#### **Дополнительная литература**

4. Баженов В.А., Сахаров А.С., Мельниченко Г.И., Черный С.М. Метод конечных элементов в задачах строительной механики. – Киев, 1994 (КГТУСА). – 368с.
5. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. Под ред. А.Ф.Смирнова ч.1 и 2.– М.: Стройиздат, 1976.
6. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

*Перечни основной и дополнительной литературы должны удовлетворять требованиям, предъявляемым к списку литературы.*

### **5.2 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и программного обеспечения, необходимых для освоения дисциплины**

- <http://www.apm.ru>
  - <http://www.sopromat-lux.narod.ru>
  - <http://www.emomi.com/>
  - [http://www.exponenta.ru/educat/links/l\\_educ.asp](http://www.exponenta.ru/educat/links/l_educ.asp)
  - <http://www.ascon.ru>
  - <http://www.ascon.ru>, <http://edu.ascon.ru>
  - Компас–график V14, V15
  - APM WinMachin
  - Acad 14
  - MathCad
  - ANSYS
- и др.

*Приводятся ссылки на специальные сайты, перечень лицензионного или находящегося в свободном доступе программного обеспечения, необходимые для изучения данной дисциплины.*

1. Windows 8 Russian. Windows Professional 8 Russian Upgrade. Договор № 104 от 17.06.2013 г. Лицензии бессрочные
2. MicrosoftOfficeStandard 2013 Russian. Договор № 114 от 12.11.2014 г. Лицензии бессрочные.
3. Система централизованного тестирования БашГУ (Moodle). GNUGeneralPublicLicense.

**6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
<b>Аудитории</b>		
202, 208, 302, 310, 401 (инженерный факультет)	Лекции	Экран настенный Classic на штативе 244*183 Мультимедиа-проектор Epson EB-X14G Ноутбук Lenovo G570 15.6 Класная доска
<b>Лаборатории</b>		
ауд. 101, 102, 103 (инженерный факультет)	Практические занятия	Мультимедиа-проектор Panasonic PT-EW640E Экран настенный Draper Luma Аппарат электр. контактной сварки «ТОР» ручной Машина МК-50 Машина Р-5 Графический планшет Mimio Pad АПСР 3D принтер 3D Systems Cube АПСР IP камера D-Link <DCS-5222L> Нутромер микром НМ 150-1250 0.01 с калибровкой Устройство ультразвуковой ударной обработки с круглым наконечником «Шмель» Видеоскоп Testo 318-V Твердомер портативный комбинированный МЕТ-УДА Комплект визуального контроля ВИК-1 А1209-ультразвуковой толщиномер Образцовые меры твердости Исследовательские стенды – 10 шт.
<b>Компьютерные классы</b>		
ауд. 403 (инженерный факультет)	Практические занятия	Мультимедиа-проектор Panasonic PT-EW640E Экран настенный Draper Luma ПК в компл. Фермо Intel Pentium G2130 – 24 шт.



МИНОБР НАУКИ РОССИИ  
ФГБОУ ВО «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ИНЖЕНЕРНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

дисциплины «Метод конечных элементов» на осенний (6) семестр  
дневной формы обучения

Вид работы	Объем дисциплины
Общая трудоемкость дисциплины (ЗЕТ / часов)	5/180
Учебных часов на контактную работу с преподавателем:	41,2
лекций	16
практических/ семинарских	24
ФКР	1,2
Контроль	45
Учебных часов на самостоятельную работу обучающихся (СРС), включая подготовку к экзамену/зачету	93,8

Форма контроля - экзамен 6 семестр

№ п/п	Тема и содержание	Форма изучения материалов: лекции, практические занятия, семинарские занятия, лабораторные работы, самостоятельная работа и трудоемкость (в часах)				Основная и дополнительная литература, рекомендация студентам (номера из списка)	Задания по самостоятельной работе студентов	Форма текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, контрольные работы, компьютерные тесты и т.п.)
		Всего	ЛК	ПР/СЕМ	СРС			
<b>Модуль 1</b>								
1	Тема 1 Основные понятия и определения	8	4		4	По приведенному списку литературы в соответствии с изучаемой темой	Выполнить задание преподавателя	Устный опрос
2	Тема 2 Конечный элемент. Матрица жесткости конечного элемента	14	4	4	6	По приведенному списку литературы в соответствии с изучаемой темой	Выполнить задание преподавателя	Устный опрос, контрольная работа
<b>Модуль 2</b>								
3	Тема 3 Преобразование матрицы жесткости при переходе от одной системы координат к другой	18	4	4	10	По приведенному списку литературы в соответствии с изучаемой темой	Выполнить задание преподавателя	Устный опрос
4	Тема 4 Пример построения матрицы жесткости элемента	24		4	20	По приведенному списку литературы в соответствии с изучаемой темой	Выполнить задание преподавателя	Устный опрос, контрольная работа
<b>Модуль 3</b>								
5	Тема 5 Формирование и решение системы уравнений МКЭ. Определение внутренних усилий в элементах	30	4	6	20	По приведенному списку литературы в соответствии с изучаемой темой	Выполнить задание преподавателя	Устный опрос
6	Тема 6	26		6	20	По приведенному списку литературы	Выполнить задание преподавателя	Устный опрос, контрольная работа

Пример расчета стержневой системы методом конечных элементов											
Экзамен								13,8		Выполнить задания преподавателя	
<b>Всего часов:</b>	<b>133,8</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>93,8</b>							



**Рейтинг – план дисциплины****Метод конечных элементов**

(название дисциплины согласно рабочему учебному плану)

Специальность – Технологические машины и оборудование  
курс – 3, семестр – весенний (6), 2018/2019 уч.г.

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			min	max
<b>Модуль 1</b>				
<b>Текущий контроль</b>			0	15
1. Аудиторная работа	1,25	6	0	7,5
2. Устный опрос	1,25	6	0	7,5
<b>Рубежный контроль</b>			0	10
1. Письменная контрольная работа	10	1	0	10
<b>Модуль 2</b>				
<b>Текущий контроль</b>			0	15
1. Аудиторная работа	1,25	6	0	7,5
2. Устный опрос	1,25	6	0	7,5
<b>Рубежный контроль</b>			0	10
1. Письменная контрольная работа	10	1	0	10
<b>Модуль 3</b>				
<b>Текущий контроль</b>			0	10
1. Аудиторная работа	0,625	8	0	5
2. Устный опрос	0,625	8	0	5
<b>Рубежный контроль</b>			0	10
1. Письменная контрольная работа	10	1	0	10
<b>Поощрительные баллы</b>			0	10
1. Студенческая олимпиада	4	1	0	4
2. Публикация статей	4	1	0	4
3. Работа со школьниками (кружок, конкурсы, олимпиады)	2	1	0	2
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>			0	-16
1. Посещение лекционных занятий	-0,8	8	0	-6,4
2. Посещение практических, семинарских, лабораторных занятий	-0,8	12	0	-9,6
<b>Итоговый контроль</b>				
<b>Экзамен</b>	30	1	0	30

